

Séries de Fourier

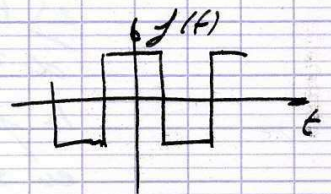
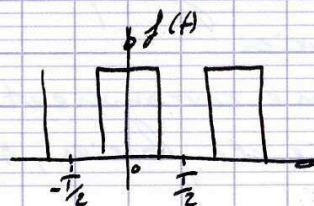
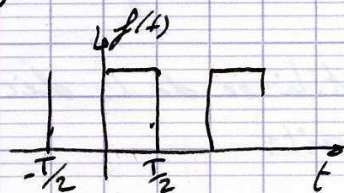
Rappels et condition de Dirichlet

Pour être développable en série de Fourier, une fonction $f(t)$ doit:

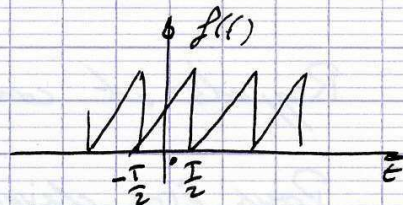
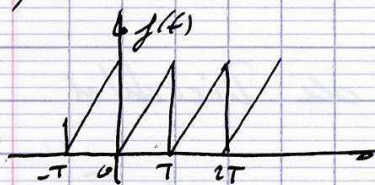
- * être périodique, de période T , de pulsation ω avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$, telle que $f(t+T) = f(t)$ pour tout t .
- * être définie dans un intervalle $]-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}[$
- * vérifier les conditions dites de Dirichlet qui sont:
 - Ne posséder que des discontinuités de première espèce (sauts finis) c'est à dire des points z tels que $f(z-) \neq f(z+)$ (valeur de droite $\neq$ de la valeur de gauche), en nombre fini dans l'intervalle de la période T .
 - Avoir qu'un nombre fini de maxima et de minima dans T .
 - Pourtant où $f(t)$ est continue, sa dérivée $f'(t)$ doit être bornée, autrement dit il ne faut pas que $f(t)$ présente de points à tangente verticale sauf aux discontinuités.

exemples: les fonctions suivantes sont très couramment rencontrées dans le domaine du génie électro-

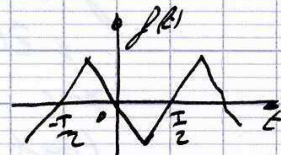
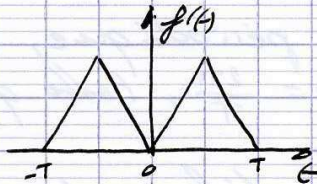
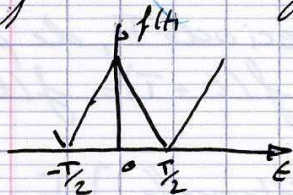
fonction carré



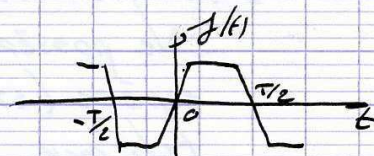
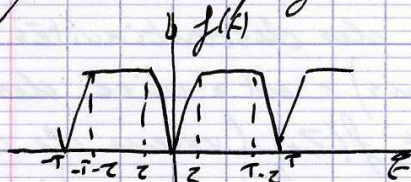
fonction dents de scie.



fonction Triangle.



fonction Trapèze.



I) Expressions mathématiques

Soit une fonction $f(t)$ de la variable t , intégrable, sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$

1) Calcul de a_0 .

par définition on a: $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$.

c'est la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle d'une période $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$

2) Forme algébrique de la décomposition en série de Fourier.

la forme couramment utilisée de la décomposition en série de Fourier, s'écrit:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Les coefficients de la série de Fourier s'évaluent selon les expressions suivantes:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

- pour $n=1$, la fonction $(a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t))$ s'appelle le fondamental de la fonction.
- les fonctions $(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$ s'appellent les Harmoniques de la fonction.

3) Forme complexe de la décomposition en série de Fourier.

Introduisons les formules d'Euler dans la décomposition en série de Fourier de $f(t)$

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \right)$$

$$\text{soit } f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n - jb_n}{2} e^{-jn\omega t} \right)$$

$$\text{Posons } c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad \text{et} \quad c_n^* = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad \text{et calculons}$$

leurs expressions.

Les 2 coeffs a_n et b_n étant réels, les coefficients c_n et c_n^- sont des complexes conjugués l'un de l'autre: $c_n = \bar{c}_n$

Calculons c_n :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt - \frac{j}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) [\cos(n\omega t) - j \sin(n\omega t)] dt \end{aligned}$$

$$\text{soit } c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad \text{et}$$

$$c_n^- = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega t} dt.$$

On passe de c_n à c_n^- en changeant j en $-j$, ce qui revient, d'après l'expression de c_n à changer n en $-n$.

$$c_n = \bar{c}_n = c_{-n}$$

Le développement de $f(t)$ est donc:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t})$$

et s'exprime sous la forme.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad \text{avec } c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

$$\text{Pour } n=0 \text{ on obtient } c_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt.$$

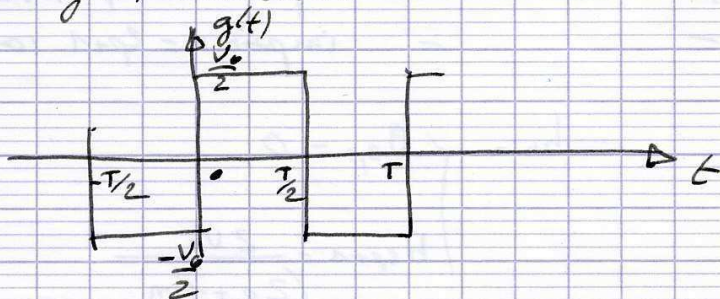
On obtient alors

$$f(t) = \frac{V_0}{2} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p \frac{V_0}{(2p+1)\pi} e^{2i(p+1)\omega t}$$

On remarque qu'en regroupant la valeur positive et la valeur négative correspondant à une même fréquence, on retrouve le résultat:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{\pi} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] - \frac{V_0}{3\pi} [e^{3i\omega t} + e^{-3i\omega t}] + \dots \\ &= \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{\pi} \left[\cos \omega t - \frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 5\omega t}{5} - \dots \right] \end{aligned}$$

b) Soit $g(t)$ suivant:



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt = \frac{1}{T} \left(\int_{-T/2}^0 -\frac{V_0}{2} dt + \int_0^{T/2} \frac{V_0}{2} dt \right) = 0$$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^0 -\frac{V_0}{2} \cos(n\omega t) dt + \int_0^{T/2} \frac{V_0}{2} \cos(n\omega t) dt \right) \\ &= \frac{2V_0}{T} \left(\left[-\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-T/2}^0 + \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^{T/2} \right) \end{aligned}$$