

Rappel

$$\times \cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\times \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\times \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\times \cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\times \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\cos'(ax) = -a \sin(ax)$$

$$\sin'(ax) = a \cos(ax)$$

Exponentiel

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$(e^{ax})' = ae^{ax}$$

$$\int_B^C e^{ax} dx = \left[\frac{e^{ax}}{a} \right]_B^C$$

Nombres complexes $\mathbb{C}$

$$(a + jb) \text{ avec } j^2 = -1$$

$$(A e^{j2\pi f t})^- = A (j2\pi f) e^{j2\pi f t}$$

example:

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A e^{j2\pi f_0 t} dt = A \left[\frac{e^{j2\pi f_0 t}}{j2\pi f_0} \right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}$$

$$= \frac{A}{j2\pi f_0} \left[e^{j2\pi f_0 \frac{T_0}{2}} - e^{j2\pi f_0 (-\frac{T_0}{2})} \right]$$

$$= \frac{A}{j2\pi f_0} \left[e^{j\pi f_0 T_0} - e^{-j\pi f_0 T_0} \right] \quad \text{sh(x)}$$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A e^{j2\pi f_0 t} dt = A \left[\frac{e^{j2\pi f_0 t}}{j2\pi f_0} \right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}$$

$$= \frac{A}{j2\pi f_0} \left[e^{j2\pi f_0 \frac{T_0}{2}} - e^{-j2\pi f_0 \frac{T_0}{2}} \right]$$

$$= \frac{A}{j2\pi f_0} \left[\begin{matrix} e^{j\pi f_0 T_0} & e^{-j\pi f_0 T_0} \\ \cos + j \sin & \cos - j \sin \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{A}{j2\pi f_0} \left[(\cos(\pi f_0 T_0) + j \sin(\pi f_0 T_0)) - (\cos(\pi f_0 T_0) - j \sin(\pi f_0 T_0)) \right]$$

$$(\cos(x) - \cos(x)) = 0$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$= \frac{A}{j2\pi f_0} \left[2j \sin(\pi f_0 T_0) \right]$$

$$= A T_0 \frac{\sin(\pi f_0 T_0)}{\pi f_0 T_0}$$

$$= A T_0 \text{sinc}(\pi f_0 T_0)$$

Sinc: sinus cardinal

$$\text{Sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Analyse spectrale.

L'analyse spectrale nécessite une Transformée de Fourier ou un développement en série de Fourier. Cette analyse apporte plus d'informations sur le signal à traiter.

Signal à durée limitée $\rightarrow$ TF

- - périodique $\rightarrow$ Série de F

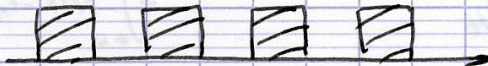
1^{er} cas: le signal est à durée finie (Dirac, Rectangle, Triangle...)



Energie finie.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

2^{ème} cas: le signal à puissance moyenne finie (signaux périodiques) $\rightarrow$ sin, cos, ex



On applique un développement en Série de Fourier.

$$X(f) = a_0(f) + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n 2\pi f t) + \sum_{n \geq 1} b_n \sin(n 2\pi f t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(f) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n 2\pi f t) dt; \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n 2\pi f t) dt \end{array} \right.$$

$$C_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-2\pi j n f t} dt \quad n \in \mathbb{Z}$$

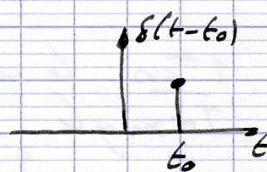
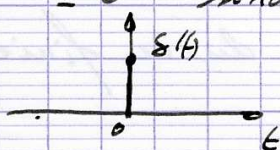
Exemple.

Cas : signaux à énergie finie.

1. Impulsion de Dirac

$$\delta(t) = 1 \quad \text{si } t=0$$

$$= 0 \quad \text{sinon.}$$



$$X(f) \stackrel{\text{TF}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-2\pi j f t} dt = e^{j 2\pi 0}$$

$$X(f) = 1$$

$$\delta(t) \stackrel{\text{TF}}{=} 1.$$

$$Y(f) \stackrel{\text{TF}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) e^{-2\pi j f t} dt$$

$$Y(f) = e^{-2\pi j f t_0}$$

$$x(t-t_0) \Rightarrow X(f) e^{-j 2\pi f t_0}$$

$$\text{TF} \{ x(t-t_0) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-2\pi j f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-2\pi j f (t-t_0) - j 2\pi f t_0} dt$$

$$= e^{-j 2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-2\pi j f (t-t_0)} dt$$

à connaître

$$x(t) \Rightarrow X(f)$$

$$\delta(t) \Rightarrow 1$$

$$\delta(t-t_0) \Rightarrow e^{-2\pi j f t_0}$$

$$\delta(t+t_0) \Rightarrow e^{2\pi j f t_0}$$

Propriétés:

$$x(t) \xrightarrow{\quad} X(f)$$

$$y(t) = x'(t) \xrightarrow{\quad} Y(f) = 2\pi j f \cdot X(f)$$

Méthode utilisée:

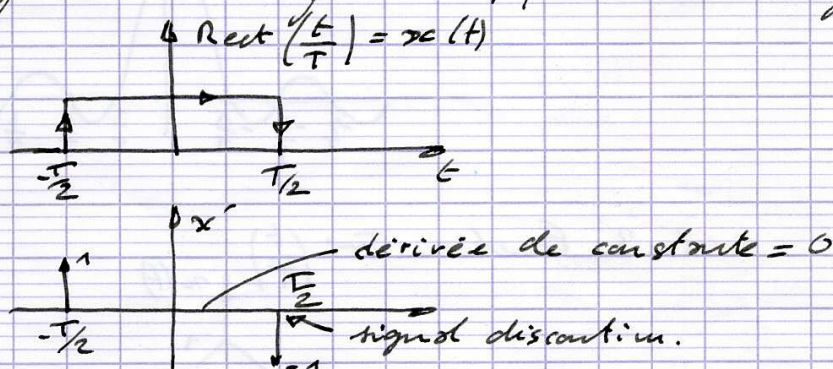
On dérive le signal $x(t) \rightarrow y(t)$

On calcule $Y(f)$

On en déduit $X(f) = \frac{Y(f)}{2\pi j f} \rightarrow$ dérivée.

à retenir

Cas 2 Signaux rectangulaires, fonction rectangle.



$$x'(t) = \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$\delta(t - t_0) \rightarrow e^{-2\pi j f t_0}$$

$$\delta\left(t + \frac{T}{2}\right) \rightarrow e^{-2\pi j f \left(-\frac{T}{2}\right)} \quad (t_0 = -\frac{T}{2})$$

$$\delta\left(t - \frac{T}{2}\right) \rightarrow e^{-2\pi j f \left(\frac{T}{2}\right)} \quad (t_0 = \frac{T}{2})$$

$$\delta\left(t - \frac{T}{2}\right) \rightarrow e^{-2\pi j f \left(\frac{T}{2}\right)} \quad (t_0 = \frac{T}{2})$$

$$\delta\left(t - \frac{T}{2}\right) \rightarrow e^{-\pi j f T}$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) dt = e^{-2\pi j f \left(-\frac{T}{2}\right)} - e^{-2\pi j f \left(\frac{T}{2}\right)}$$

$$X(f) = \frac{Y(f)}{2\pi j f} = \frac{e^{\pi j f T} - e^{-\pi j f T}}{2\pi j f}$$

$$= \frac{[\cos(\pi f T) + j \sin(\pi f T)] - [\cos(\pi f T) - j \sin(\pi f T)]}{2\pi j f}$$

$$Y(f) = 2f \sin(\pi f T)$$

$$X(f) = \frac{Y(f)}{2\pi f} \quad (\text{Propriété de la TF})$$

$$X(f) = \frac{2f \sin(\pi f T)}{2\pi f} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$$

$$= T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \operatorname{sinc}(\pi f T)$$

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{sinus cardinal.}$$

