

Rappel

$$\times \cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\times \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\times \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\times \cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\times \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\cos'(ax) = -a\sin(ax)$$

$$\sin'(ax) = a\cos(ax)$$

Exponentiel

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$(e^{ax})' = ae^{ax}$$

$$\int_B^C e^{ax} dx = \left[\frac{e^{ax}}{a} \right]_B^C$$

Nombres complexes $\mathbb{C}$

$$(a + jb) \text{ avec } j^2 = -1$$

$$(A e^{j2\pi f t})^* = A (j2\pi f) e^{j2\pi f t}$$

example:

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A e^{j2\pi f t} dt = A \left[\frac{e^{j2\pi f t}}{j2\pi f} \right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}$$

$$= \frac{A}{j2\pi f} \left[e^{j2\pi f \frac{T_0}{2}} - e^{j2\pi f (-\frac{T_0}{2})} \right]$$

$$= \frac{A}{j2\pi f} \left[e^{j\pi f T_0} - e^{-j\pi f T_0} \right] \quad \text{sh}(x)$$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A e^{j2\pi f t} dt = A \left[\frac{e^{j2\pi f t}}{j2\pi f} \right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}$$

$$= \frac{A}{j2\pi f} \left[e^{j2\pi f \frac{T_0}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{T_0}{2}} \right]$$

$$= \frac{A}{j2\pi f} \left[\begin{matrix} e^{j\pi f T_0} & e^{-j\pi f T_0} \\ \cos + j \sin & \cos - j \sin \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{A}{j2\pi f} \left[(\cos(\pi f T_0) + j \sin(\pi f T_0)) - (\cos(\pi f T_0) - j \sin(\pi f T_0)) \right]$$

$$(\cos(x) + j \sin(x)) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$= \frac{A}{j2\pi f} \left[2j \sin(\pi f T_0) \right]$$

$$= A T_0 \frac{\sin(\pi f T_0)}{\pi f T_0}$$

$$= A T_0 \sin(\pi f T_0)$$

Sinc: sinus cardinal

$$\text{Sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Analyse spectrale.

L'analyse spectrale nécessite une Transformée de Fourier ou un développement en série de Fourier. Cette analyse apporte plus d'informations sur le signal à traiter.

Signal à durée limitée $\rightarrow$ TF

- - périodique $\rightarrow$ Série de F

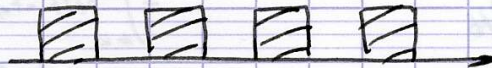
1^{er} cas: le signal est à durée finie (Dirac, Rectangle, Triangle...)



Energie finie.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

2^{ème} cas: le signal à puissance moyenne finie (signaux périodiques) $\rightarrow$ sin, cos, ex



On applique un développement en Série de Fourier.

$$X(f) = a_0(f) + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n 2\pi f t) + \sum_{n \geq 1} b_n \sin(n 2\pi f t)$$

$$\begin{cases} a_0(f) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n 2\pi f t) dt; \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n 2\pi f t) dt \end{cases}$$

$$C_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-2\pi j n f t} dt \quad n \in \mathbb{Z}$$

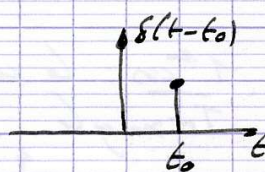
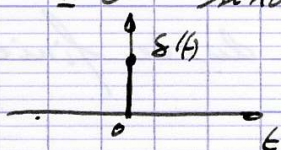
Exemple.

Cas : signaux à énergie finie.

1. Impulsion de Dirac

$$\delta(t) = 1 \quad \text{si } t=0$$

$$= 0 \quad \text{sinon.}$$



$$X(f) \stackrel{\text{TF}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-2\pi j f t} dt = e^{j 2\pi 0}$$

$$X(f) = 1$$

$$\delta(t) \stackrel{\text{TF}}{=} 1.$$

$$Y(f) \stackrel{\text{TF}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) e^{-2\pi j f t} dt$$

$$Y(f) = e^{-2\pi j f t_0}$$

$$\begin{aligned} x(t-t_0) &\Rightarrow X(f) e^{-j 2\pi f t_0} \\ \text{TF} \{ x(t-t_0) \} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-2\pi j f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-2\pi j f (t-t_0) - j 2\pi f t_0} dt \\ &= e^{-j 2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-2\pi j f (t-t_0)} dt \end{aligned}$$

à connaître

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) \Rightarrow X(f) \\ \delta(t) \Rightarrow 1 \\ \delta(t-t_0) \Rightarrow e^{-2\pi j f t_0} \\ \delta(t+t_0) \Rightarrow e^{2\pi j f t_0} \end{array} \right.$$

Propriétés:

$$x(t) \xrightarrow{\quad} X(f)$$

$$y(t) = x'(t) \xrightarrow{\quad} Y(f) = 2\pi j f \cdot X(f)$$

Méthode utilisée:

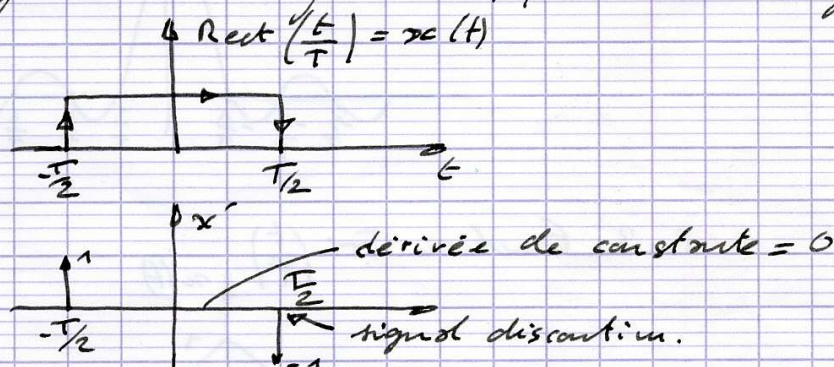
On dérive le signal $x(t) \rightarrow y(t)$

On calcule $Y(f)$

On en déduit $X(f) = \frac{Y(f)}{2\pi j f} \rightarrow$ dérivée.

à retenir!

Cas 2 Signaux rectangulaires, fonction rectangle.



$$x'(t) = \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$\delta(t - t_0) \rightarrow e^{-2\pi j f t_0}$$

$$\delta\left(t + \frac{T}{2}\right) \rightarrow e^{-2\pi j f \left(-\frac{T}{2}\right)} \quad (t_0 = -\frac{T}{2})$$

$$\delta\left(t - \frac{T}{2}\right) \rightarrow e^{-2\pi j f \left(\frac{T}{2}\right)} \quad (t_0 = \frac{T}{2})$$

$$\delta\left(t - \frac{T}{2}\right) \rightarrow e^{-\pi j f T}$$

$$\delta\left(t + \frac{T}{2}\right) \rightarrow e^{\pi j f T}$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) dt = e^{\pi j f T} - e^{-\pi j f T}$$

$$X(f) = \frac{Y(f)}{2\pi j f} = \frac{e^{\pi j f T} - e^{-\pi j f T}}{2\pi j f}$$

$$= \left[\cos(\pi f T) + j \sin(\pi f T) \right] - \left[\cos(\pi f T) - j \sin(\pi f T) \right]$$

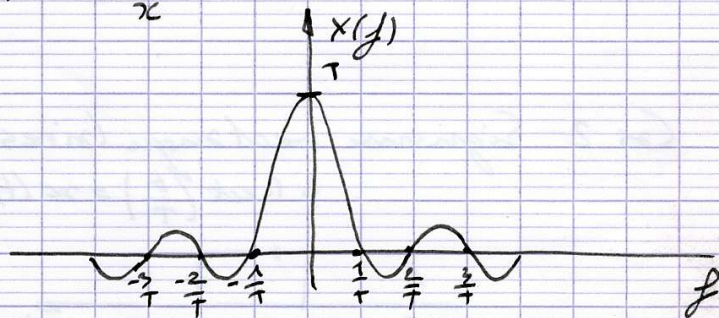
$$Y(f) = 2f \sin(\pi f T)$$

$$X(f) = \frac{Y(f)}{2\pi j f} \quad (\text{Propriété de la TF})$$

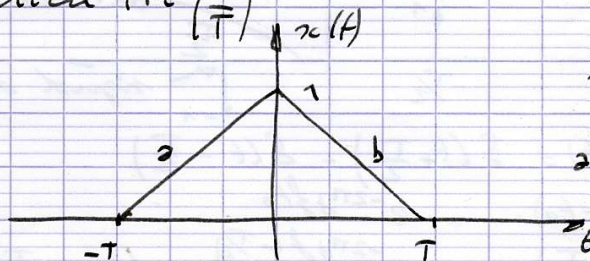
$$X(f) = \frac{2f \sin(\pi f T)}{2\pi j f} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi j f}$$

$$= T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \text{sinc}(\pi f T)$$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{sinus cardinal.}$$



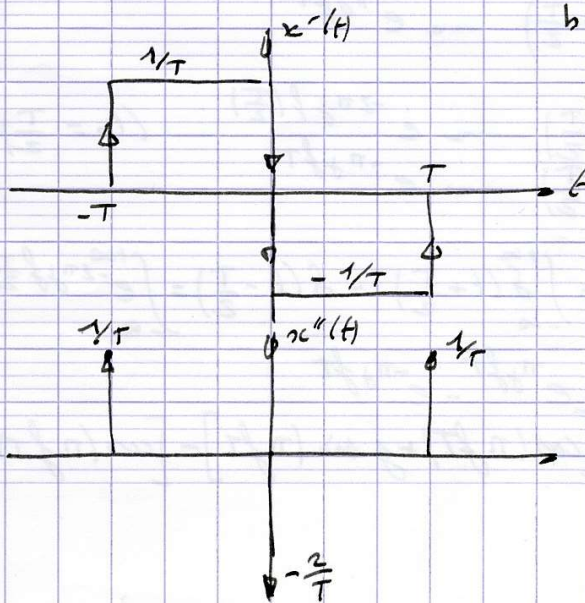
cas 3: Fonction Tri $\left(\frac{t}{T}\right)$



$$\frac{y_T - y_0}{x_T - x_0} = \text{pente } a$$

$$a = \frac{1 - 0}{0 - (-T)} = \frac{1}{T}$$

$$b = \frac{0 - 1}{T - 0} = -\frac{1}{T}$$



$$x''(t) = \frac{1}{T} \delta(t+T) - \frac{2}{T} \delta(t) + \frac{1}{T} \delta(t-T)$$

$$G(f) = \text{TF}(x''(t))$$

$$\delta(t-t_0) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-2\pi j f t_0}$$

$$\begin{aligned} G(f) &= \frac{1}{T} e^{2\pi j f T} - \frac{2}{T} + \frac{1}{T} e^{-2\pi j f T} \\ &= \frac{1}{T} (e^{2\pi j f T} + e^{-2\pi j f T}) - \frac{2}{T} \\ &= \frac{1}{T} (2 \cos(2\pi f T)) - \frac{2}{T} \\ &= \frac{2}{T} (\cos 2\pi f T - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{\text{TF}(x''(t))}{(2\pi j f)^2} = \frac{2(\cos(2\pi f T) - 1)}{-4\pi^2 f^2 T} \\ &= \frac{\cos(2\pi f T) - 1}{-2\pi^2 f^2 T} \end{aligned}$$

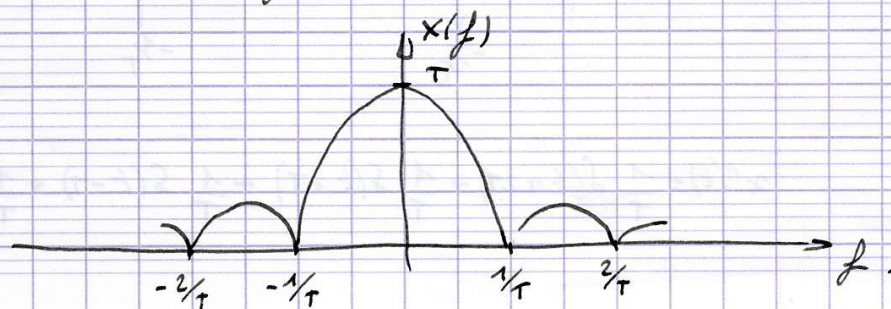
$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos(2\alpha) - 1 = -2\sin^2\alpha$$

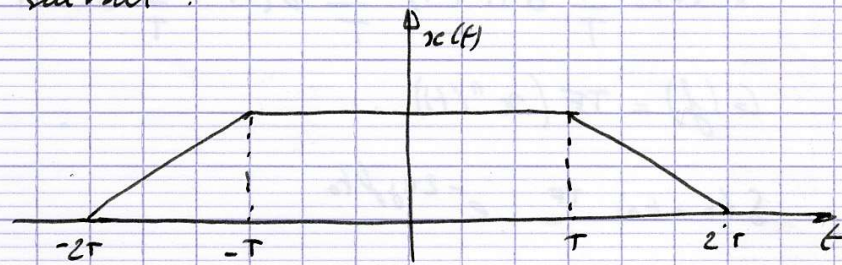
$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{-2\sin^2(\pi f T)}{-2\pi^2 f^2 T} \\ &= \frac{-T 2\sin^2(\pi f T)}{-2\pi^2 f^2 T^2} \end{aligned}$$

$$\text{Sinc}(\pi f T) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

$$X(f) = T \text{sin}^2 C(\pi f T)$$



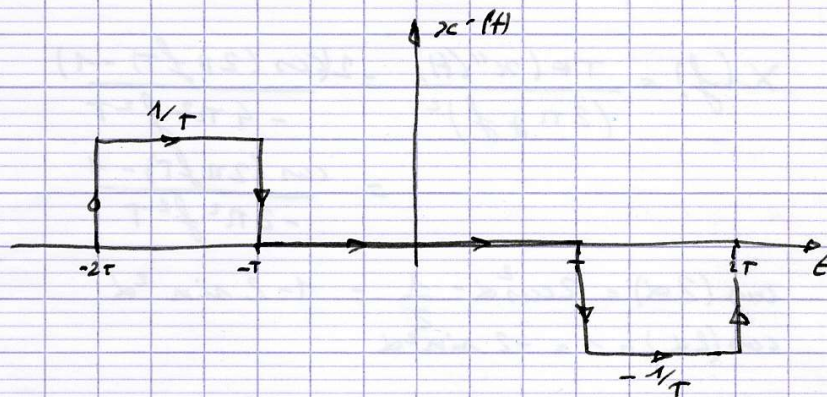
Cas suivant :



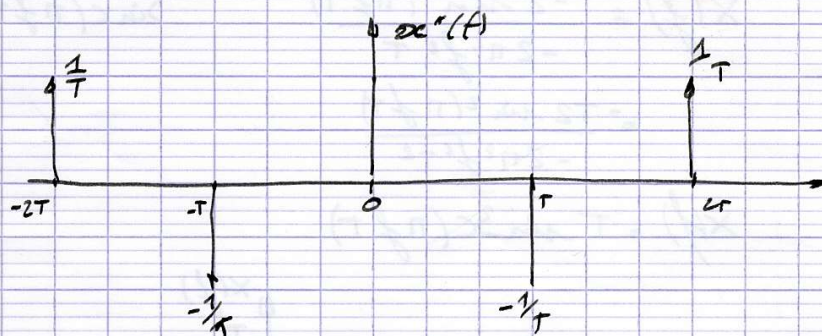
Étapes :

- ① Calculer $x'(t)$ graphiquement
- ② - - - $x''(t)$ - - - - -
- ③ en déduire $G(f) = TF(x''(t))$
- ④ Retrouver $x(f)$

①



②



$$x''(t) = \frac{1}{T} \delta(t+2T) - \frac{1}{T} \delta(t+T) - \frac{1}{T} \delta(t-T) + \frac{1}{T} \delta(t-2T)$$

$$G(f) = \text{TF}(x''(t))$$

$$\delta(t-t_0) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-2\pi j f t_0}$$

$$G(f) = \frac{1}{T} e^{2\pi j f(2\tau)} - \frac{1}{T} e^{2\pi j f(\tau)} - \frac{1}{T} e^{2\pi j f(-\tau)} + \frac{1}{T} e^{2\pi j f(-2\tau)}$$

$$= \frac{1}{T} (e^{2\pi j f(2\tau)} + e^{2\pi j f(-2\tau)}) - \frac{1}{T} (e^{2\pi j f(\tau)} + e^{2\pi j f(-\tau)})$$

$$= \frac{1}{T} (e^{2\pi j f(2\tau)} + e^{-2\pi j f(2\tau)}) - \frac{1}{T} (e^{2\pi j f(\tau)} + e^{-2\pi j f(\tau)})$$

$$= \frac{1}{T} (2\cos(2\pi f(2\tau))) - \frac{1}{T} (2\cos(2\pi f(\tau)))$$

$$= \frac{1}{T} (2\cos(4\pi f\tau) - 2\cos(2\pi f\tau)) \quad \cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$= \frac{-4}{T} \left[\sin\left(\frac{6\pi f\tau}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi f\tau}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{-4}{T} \left[\sin(3\pi f\tau) \sin(\pi f\tau) \right]$$

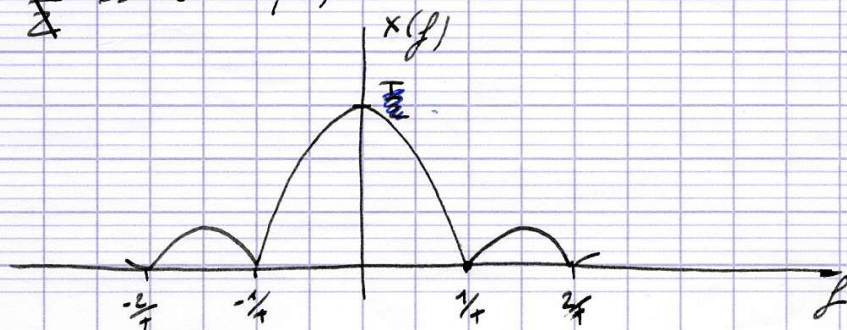
$$= \frac{-4}{T} \left[\sin(\pi f\tau) \sin(\pi f\tau) \right] = \frac{-4}{T} \sin^2(\pi f\tau)$$

$$X(f) = \frac{\text{TF}(x''(t))}{(2\pi j f)^2}$$

$$= \frac{-4}{T} \left(\frac{\sin^2(\pi f\tau)}{-4\pi^2 f^2} \right) = \frac{-1}{T} \frac{\sin^2(\pi f\tau)}{-\pi^2 f^2}$$

$$= \frac{-1}{T} \frac{\sin^2(\pi f\tau)}{-\pi^2 f^2} = \frac{1}{T} \times \frac{\sin^2(\pi f\tau)}{(\pi f\tau)^2}$$

$$= \frac{1}{T} \text{sinc}^2(\pi f\tau)$$



Séries de Fourier

Rappels et condition de Dirichlet

Pour être développable en série de Fourier, une fonction $f(t)$ doit:

- * être périodique, de période T , de pulsation ω avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$, telle que $f(t+T) = f(t)$ pour tout t .

- * être définie dans un intervalle $]-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}[$

- * vérifier les conditions dites de Dirichlet qui sont:

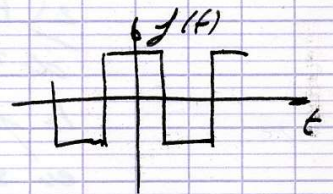
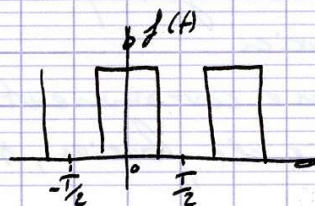
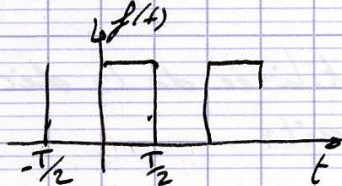
- Ne posséder que des discontinuités de première espèce (sauts finis) c'est à dire des points z tels que $f(z-) \neq f(z+)$ (valeur de droite $\neq$ de la valeur de gauche), en nombre fini dans l'intervalle de la période T .

- Avoir qu'un nombre fini de maxima et de minima dans T .

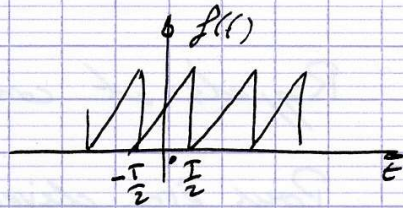
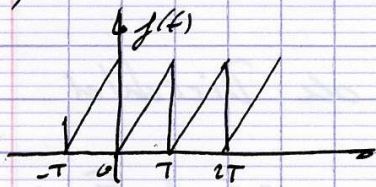
- Pourtant où $f(t)$ est continue, sa dérivée $f'(t)$ doit être bornée, autrement dit il ne faut pas que $f(t)$ présente de points à tangente verticale sauf aux discontinuités.

exemples: les fonctions suivantes sont très couramment rencontrées dans le domaine du génie électro-

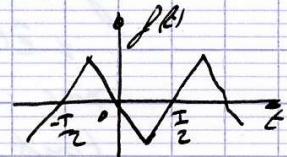
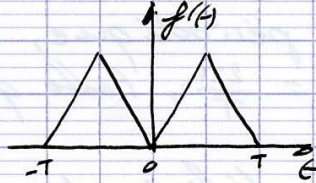
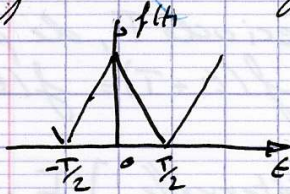
fonction carré



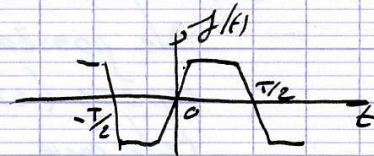
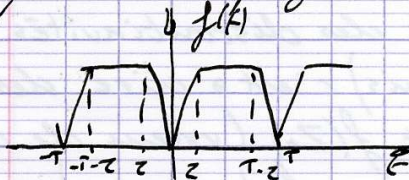
fonction dents de scie.



fonction Triangle.



fonction Trapèze.



I) Expressions mathématiques

Soit une fonction $f(t)$ de la variable t , intégrable, sur l'intervalle $]-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}[$

1) Calcul de a_0 .

par définition on a: $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt.$

c'est la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle d'une période $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$

2) Forme algébrique de la décomposition en série de Fourier.

la forme couramment utilisée de la décomposition en série de Fourier, s'écrit:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Les coefficients de la série de Fourier s'évaluent selon les expressions suivantes:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

- pour $n=1$, la fonction $(a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t))$ s'appelle le fondamental de la fonction.
- les fonctions $(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$ s'appellent les Harmoniques de la fonction.

3) Forme complexe de la décomposition en série de Fourier.

Introduisons les formules d'Euler dans la décomposition en série de Fourier de $f(t)$

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \right)$$

$$\text{soit } f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n - jb_n}{2} e^{-jn\omega t} \right)$$

$$\text{Posons } c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad \text{et} \quad c_n^- = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad \text{et calculons}$$

leurs expressions.

Les 2 coeffs a_n et b_n étant réels, les coefficients c_n et $\bar{c}_n$ sont alors complexes conjugués l'un de l'autre: $c_n = \bar{c}_n$

Calculons c_n :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt - \frac{j}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) [\cos(n\omega t) - j \sin(n\omega t)] dt \end{aligned}$$

$$\text{soit } c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad \text{et}$$

$$\bar{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega t} dt.$$

On passe de c_n à $\bar{c}_n$ en changeant j en $-j$, ce qui revient, d'après l'expression de c_n à changer n en $-n$.

$$c_n = \bar{c}_n = c_{-n}$$

Le développement de $f(t)$ est donc:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t})$$

et s'exprime sous la forme.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad \text{avec } c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

$$\text{Pour } n=0 \text{ on obtient } c_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt.$$

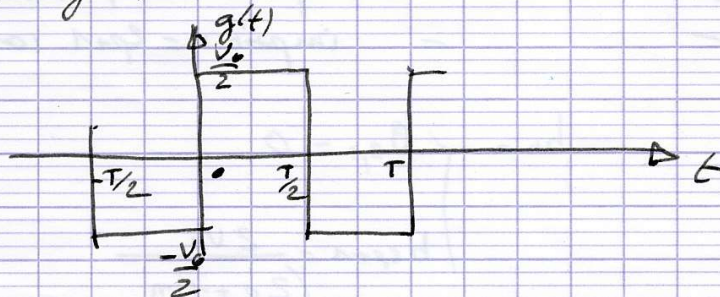
On obtient alors

$$f(t) = \frac{V_0}{2} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p \frac{V_0}{(2p+1)\pi} e^{2(2p+1)\pi t}$$

On remarque qu'en regroupant la valeur positive et la valeur négative correspondant à une même fréquence, on retrouve le résultat:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{\pi} [e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}] - \frac{V_0}{3\pi} [e^{3j\omega t} + e^{-3j\omega t}] + \dots \\ &= \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{\pi} \left[\cos \omega t - \frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 5\omega t}{5} - \dots \right] \end{aligned}$$

b) Soit $g(t)$ suivant:



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt = \frac{1}{T} \left(\int_{-T/2}^0 -\frac{V_0}{2} dt + \int_0^{T/2} \frac{V_0}{2} dt \right) = 0$$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$= \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^0 -\frac{V_0}{2} \cos(n\omega t) dt + \int_0^{T/2} \frac{V_0}{2} \cos(n\omega t) dt \right)$$

$$= \frac{2V_0}{T} \left(\left[-\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-T/2}^0 + \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^{T/2} \right)$$

$$= \frac{2V_0}{T} \left[\frac{\sin(-\frac{n\omega T}{2})}{n\omega} + \frac{\sin(\frac{n\omega T}{2})}{n\omega} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^0 -\frac{V_0}{2} \sin(n\omega t) dt + \int_0^{T/2} \frac{V_0}{2} \sin(n\omega t) dt \right) \\ &= \frac{V_0}{T} \left(\left[\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-T/2}^0 + \left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^{T/2} \right) \\ &= \frac{V_0}{T} \left[\frac{1 - \cos(-\frac{n\omega T}{2})}{n\omega} - \frac{\cos(\frac{n\omega T}{2}) - 1}{n\omega} \right] \\ &= \frac{2V_0}{n\omega T} (1 - \cos(n\pi)) \end{aligned}$$

si n est un nombre pair $n = 2p$: $\cos(n\pi) = \cos(2p\pi) = 1$
 - impair $n = 2p+1$: $\cos((2p+1)\pi) = -1$

$$b_n = \begin{cases} b_{2p} = 0 \\ b_{2p+1} = \frac{2V_0}{(2p+1)\pi} \end{cases}$$

finalement on obtient.

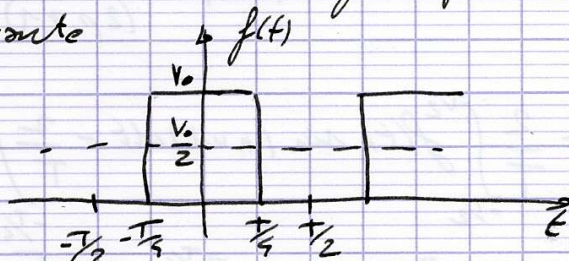
$$g(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2V_0}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)\omega t)$$

pour la forme complexe.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 -\frac{V_0}{2} e^{-jn\omega t} dt - \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \frac{V_0}{2} e^{-jn\omega t} dt \end{aligned}$$

4) Exemple.

Soit la fonction rééchant $f(t)$ présentée sur la figure suivante



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} V_0 dt = \frac{V_0}{T} \left[t \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{V_0}{T} \cdot \frac{2T}{4} = \frac{V_0}{2}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{V_0}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} V_0 \cos(n\omega t) dt$$

$$= \frac{2V_0}{T} \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-T/4}^{T/4}$$

$$= \frac{2V_0}{T} \left[\frac{\sin\left(\frac{n\omega T}{4}\right)}{n\omega} - \frac{\sin\left(-\frac{n\omega T}{4}\right)}{n\omega} \right]$$

$$= \frac{4V_0}{n\omega T} \sin\left(\frac{n\omega T}{4}\right) = \frac{2V_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$a_n = \frac{2V_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

si n est un nombre pair $n = 2p \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin(p\pi) = 0$
 - - - - - impair $n = 2p+1 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p$

$$a_n = \begin{cases} a_{2p} = 0 \\ a_{2p+1} = \frac{2V_0}{(2p+1)\pi} (-1)^p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} V_0 \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2V_0}{T} \left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{2V_0}{T} \left[\frac{\cos\left(\frac{n\omega T}{4}\right)}{n\omega} + \frac{\cos\left(-\frac{n\omega T}{4}\right)}{n\omega} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

finalemant la décomposition en série de F s'écrit

$$f(t) = \frac{V_0}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2V_0}{(2p+1)\pi} \cos((2p+1)\omega t)$$

pour la forme complexe, cela donne.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} V_0 e^{-jn\omega t} dt \\ c_n &= \frac{V_0}{jn\omega T} \left[e^{-jn\omega t} \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{V_0}{jn\omega T} \left[e^{-j\frac{n\omega T}{4}} - e^{j\frac{n\omega T}{4}} \right] \\ c_n &= \frac{V_0}{n\pi} \cdot \frac{e^{-j\frac{n\pi}{2}} - e^{j\frac{n\pi}{2}}}{2j} = \frac{V_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$n = 2p \rightarrow c_{2p} = 0$$

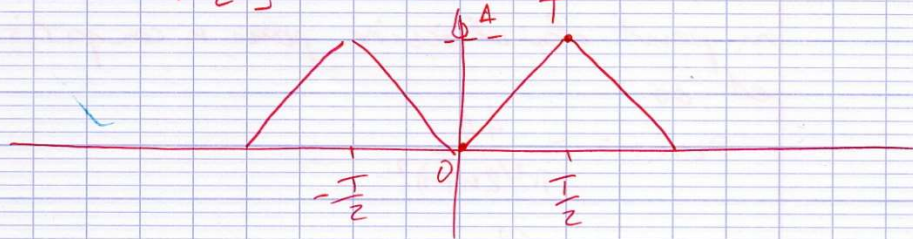
$$n = 2p+1 \rightarrow c_{2p+1} = (-1)^p \frac{V_0}{(2p+1)\pi} = \frac{a_{2p+1}}{2}$$

$$n = 0 \rightarrow c_0 = \frac{V_0}{2} = a_0$$

1) Développer en série F la fonction périodique $s(t)$ de période T définie par.

$s(t)$ fonction paire

$$t \in [0; \frac{T}{2}] \quad s(t) = 2 \frac{A}{T} t$$



Le signal est pair on en déduit que tous les b_n sont Nuls.

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} 2 \frac{A}{T} t dt = \frac{4A}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} t dt = \frac{4A}{T^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{A}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} 2 \frac{A}{T} t \cos(n\omega t) dt = \frac{8A}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} t \cos(n\omega t) dt$$

on va faire une intégration par partie en posant.

$$u = t$$

$$v' = \cos(n\omega t) \quad v = \frac{1}{n\omega} \sin(n\omega t)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{8A}{T^2} \left[\frac{t}{n\omega} \sin(n\omega t) \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{8A}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{n\omega} \sin(n\omega t) dt \\ &= -\frac{8A}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{n\omega} \sin(n\omega t) dt. \end{aligned}$$

$$\text{puisque } \sin\left(n \frac{T\omega}{2}\right) = \sin(n\pi) = 0 \quad T\omega = 2\pi$$

$$a_n = \frac{2A}{n^2 k^2} (\cos(n\pi) - 1)$$

2 cas se présentent.

$$\begin{aligned} \textcircled{a} \quad n \text{ impair} \quad n = 2n+1 \quad \cos(n\pi) - 1 = -2 \\ \textcircled{b} \quad n \text{ pair} \quad n = 2n+2 \quad \cos(n\pi) - 1 = 0 \end{aligned}$$

on peut donc écrire pour n compris entre 0 et ∞

$$a_{2n+1} = -\frac{4A}{\pi^2(2n+1)^2}$$

$$a_{2n+2} = 0$$

$$\Rightarrow S(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)\omega t)$$

$$= \frac{-V_0}{j\omega T} \left[e^{-j\omega t} \right]_0^{-T/2} + \frac{V_0}{j\omega T} \left[e^{-j\omega t} \right]_{T/2}^T$$

$$= \frac{-V_0}{j\omega T} \left[1 - e^{+j\omega \frac{T}{2}} \right] + \frac{V_0}{j\omega T} \left[e^{-j\omega \frac{T}{2}} - 1 \right]$$

$$= \frac{-V_0}{j\omega T} + \frac{V_0 e^{+j\omega \frac{T}{2}}}{j\omega T} + \frac{V_0 e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{j\omega T} - \frac{V_0}{j\omega T}$$

$$= \frac{V_0}{j\omega T} \left(e^{+j\omega \frac{T}{2}} + e^{-j\omega \frac{T}{2}} \right) - \frac{2V_0}{j\omega T} e^{+j\omega \frac{T}{2}}$$

$$= \frac{-2V_0}{j\omega T} + \frac{V_0}{j\omega T} \left(e^{+j\omega \frac{T}{2}} + e^{-j\omega \frac{T}{2}} \right)$$

$$= \frac{-2V_0}{j\omega T} + \frac{2V_0}{j\omega T} \left(e^{+j\omega \frac{T}{2}} \right)$$