

Bruits et Vibrations

Chapitre 4

Vers des systèmes à
N degrés de liberté

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

1. Définition d'un système à N ddl

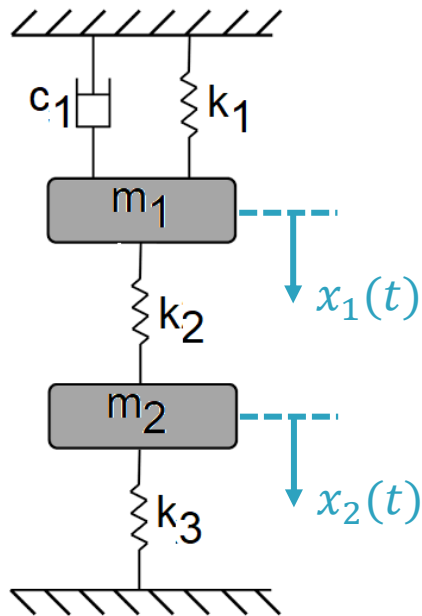
- Un système à N ddl est un système pour lequel il faut connaître **N variables indépendantes** pour connaître l'ensemble des positions des éléments du système
- Il peut s'agir :
 - ↳ D'un nombre m de solides rigides (de masse m_1 à m_m , $m < N$) dont la position est repérée par plusieurs variables indépendantes (ex. : coordonnées x_i et/ou y_i et/ou z_i pour $i \in \{1, \dots, m\}$ et avec un nombre total de variables égal à N)
 - ↳ Dans un cas « extrême », de N solides rigides dont la position est repérée par une variable unique (une variable par masse)

ATTENTION : les variables doivent être **indépendantes** :
ne pas introduire de « faux » degrés de liberté !

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

1. Définition d'un système à N ddl

- Quelques exemples de systèmes à **2 ddl**

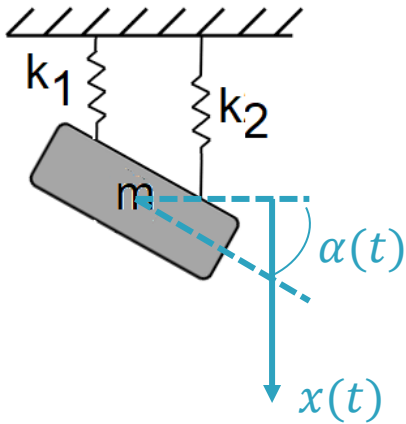


- Deux solides, de masse m_1 et m_2 , ayant chacun un seul degré de liberté en translation dans la direction \vec{x}
- En raison de la présence des ressorts, la position de la masse m_2 , x_2 , ne peut pas être reliée directement à x_1 : on a bien 2 ddl (x_1 et x_2)

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

1. Définition d'un système à N ddl

- Quelques exemples de systèmes à **2 ddl**

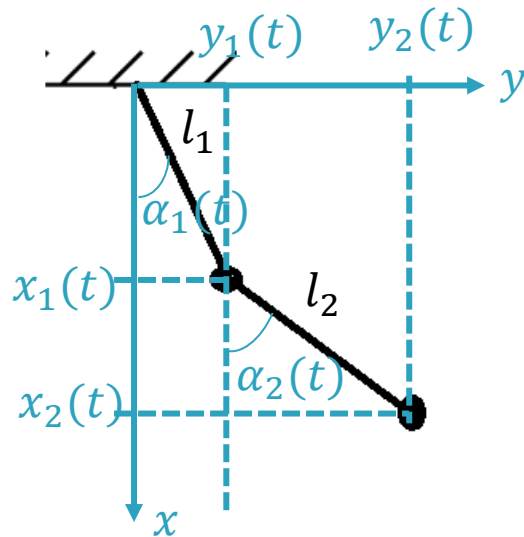


- Un solide, de masse m , dont la position est parfaitement connue si on connaît deux variables : x (ddl en translation) et α (ddl en rotation)
- En effet, la détermination de la position du centre de masse (on rappelle que nous nous intéressons à des systèmes discrets, de masse ramenée en ce point) nécessite de connaître l'inclinaison de la structure
- La structure étant suspendue par des ressorts, α n'est pas directement lié à x : on a bien 2 ddl (α et x)

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

1. Définition d'un système à N ddl

- Quelques exemples de systèmes à **2 ddl**



- Cas du pendule double, avec deux masses, m_1 et m_2
- A première vue de nombreux ddl....
- Mais, si l_1 est constante alors si une des 3 variables x_1 , y_1 ou α_1 est connue alors les 2 autres le sont aussi
 - ↳ 1 seul ddl pour m_1 : x_1 ou y_1 ou α_1
- De même pour m_2 : si l_2 est constante alors si on connaît x_2 , y_2 ou α_2 alors les deux autres variables sont connues
 - ↳ 1 seul ddl pour m_2 : x_2 , y_2 ou α_2
- En revanche, connaître x_1 (ou y_1 ou α_1) ne permet pas de connaître x_2 (ni y_2 , ni α_2)
 - ↳ **On a bien 2 ddl** : x_1 (ou y_1 ou α_1) et x_2 (ou y_2 ou α_2)

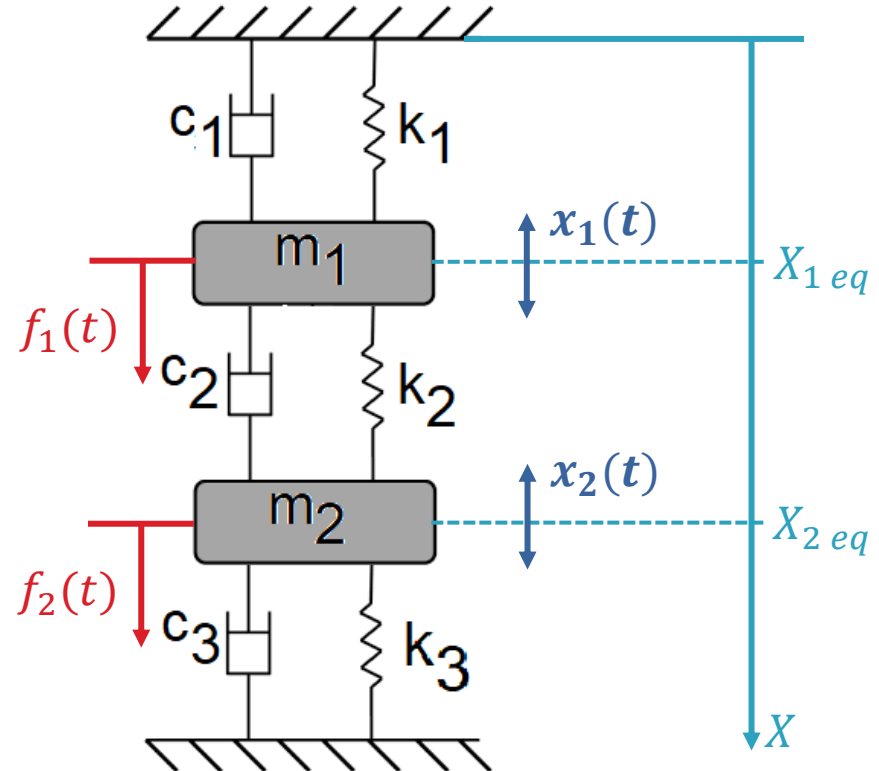
Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

2. Modélisation et mise en équations d'un système à 2 degrés de liberté

- Prenons l'exemple d'un **système à 2 ddl** constitué de 2 masses ayant chacune un degré de liberté en translation, dans la même direction, \vec{X}
- Les principes qui vont être exposés restent valables pour d'autres cas de figure (les équations varient bien évidemment)

- Schématisation générique :

- On note X_i ($i = 1$ ou 2) la position du solide de masse m_i dans le repère global
- On note x_i le **déplacement vibratoire de la masse m_i autour de sa position à l'équilibre statique**, $X_{i\ eq}$



Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

2. Modélisation et mise en équations d'un système à 2 degrés de liberté

• Bilan des efforts **sur** m_1 (projection sur \vec{X})

↳ Poids, $P = m_1 g$

↳ Force de rappel du ressort n°1 :

$$F_{R1} = -k_1(X_1 - l_{01})$$

↳ Force visqueuse de l'amortisseur n°1 :

$$F_{V1} = -c_1 \dot{X}_1$$

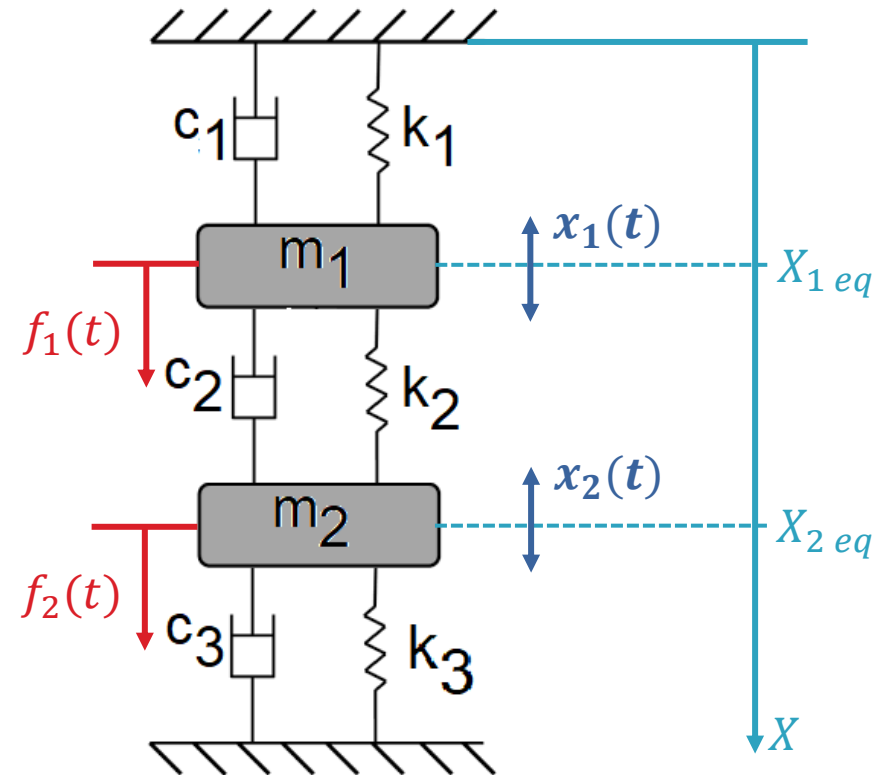
↳ Force de rappel du ressort n°2

(compression du ressort n°2 si X_1 augmente) : $F_{R2} = +k_2(X_2 - X_1 - l_{02})$

↳ Force visqueuse de l'amortisseur n°2 :

$$F_{V2} = -c_2(\dot{X}_1 - \dot{X}_2)$$

↳ Force excitatrice : f_1



Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

2. Modélisation et mise en équations d'un système à 2 degrés de liberté

• A l'équilibre statique (PFS) :

↳ $X_1 = X_{1eq}$, $X_2 = X_{2eq}$, $\dot{X}_1 = \dot{X}_2 = 0$ et si on est à l'équilibre, alors pas de force excitatrice ($f_1 = 0$)

$$\begin{aligned} \text{↳ } m_1 g - k_1(X_{1eq} - l_{01}) + k_2(X_{2eq} - X_{1eq} - l_{02}) &= 0 \\ \Rightarrow m_1 g &= k_1(X_{1eq} - l_{01}) - k_2(X_{2eq} - X_{1eq} - l_{02}) \end{aligned}$$

• Reprenons alors le PFD :

$$\begin{aligned} \text{↳ } m_1 g - k_1(X_1 - l_{01}) - c_1 \dot{X}_1 + k_2(X_2 - X_1 - l_{02}) - c_2(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) + f_1 &= m_1 \ddot{X}_1 \\ \Rightarrow k_1(X_{1eq} - l_{01} - X_1 + l_{01}) - c_1 \dot{X}_1 + k_2(-X_{2eq} + X_{1eq} + l_{02} + X_2 - X_1 - l_{02}) & \\ - c_2(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) + f_1 &= m_1 \ddot{X}_1 \end{aligned}$$

↳ Et $x_1 = X_1 - X_{1eq}$ et $x_2 = X_2 - X_{2eq}$, d'où :

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f_1, \text{ que l'on écrira plus communément :}$$

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + c_1 \dot{x}_1(t) + k_1 x_1(t) + c_2(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + k_2(x_1(t) - x_2(t)) = f_1(t)$$

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

2. Modélisation et mise en équations d'un système à 2 degrés de liberté

• Bilan des efforts **sur** m_2 (projection sur \vec{X})

↳ Poids, $P = m_2 g$

↳ Force de rappel du ressort n°2 :

$$F_{R2} = -k_2(X_2 - X_1 - l_{02})$$

↳ Force visqueuse de l'amortisseur n°2 :

$$F_{V2} = -c_2(\dot{X}_2 - \dot{X}_1)$$

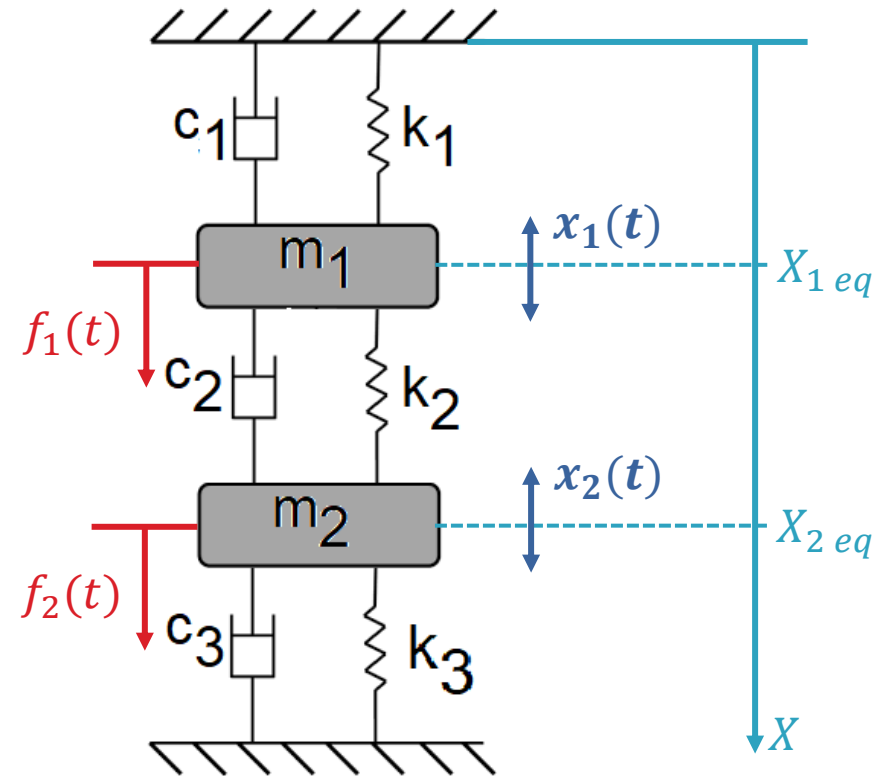
↳ Force de rappel du ressort n°3
(comprimé si X_2 augmente) :

$$F_{R3} = +k_3(X_{max} - X_2 - l_{03})$$

↳ Force visqueuse de l'amortisseur n°3 :

$$F_{V3} = -c_3\dot{X}_2$$

↳ Force excitatrice : f_2



Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

2. Modélisation et mise en équations d'un système à 2 degrés de liberté

• A l'équilibre statique (PFS) :

↳ On a toujours $X_1 = X_{1 eq}$, $X_2 = X_{2 eq}$, $\dot{X}_1 = \dot{X}_2 = 0$ et si on est à l'équilibre, alors pas de force excitatrice ($f_2 = 0$)

↳ En appliquant le même raisonnement que pour m_1 , on trouve : $m_2 g = k_2(X_{2 eq} - X_{1 eq} - l_{02}) - k_3(X_{max} - X_{2 eq} - l_{03})$

• Reprenons alors le PFD :

↳ $m_2 \ddot{X}_2 = k_2(X_{2 eq} - X_{1 eq} - l_{02} - X_2 + X_1 + l_{02}) - c_2(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) + k_3(-X_{max} + X_{2 eq} + l_{03} + X_{max} - X_2 - l_{03}) - c_3 \dot{X}_2 + f_2$

↳ Et $x_1 = X_1 - X_{1 eq}$ et $x_2 = X_2 - X_{2 eq}$, d'où :

$m_2 \ddot{x}_2 = k_2(-x_2 + x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_3(-x_2) - c_3 \dot{x}_2 + f_2$, que l'on écrira plus communément :

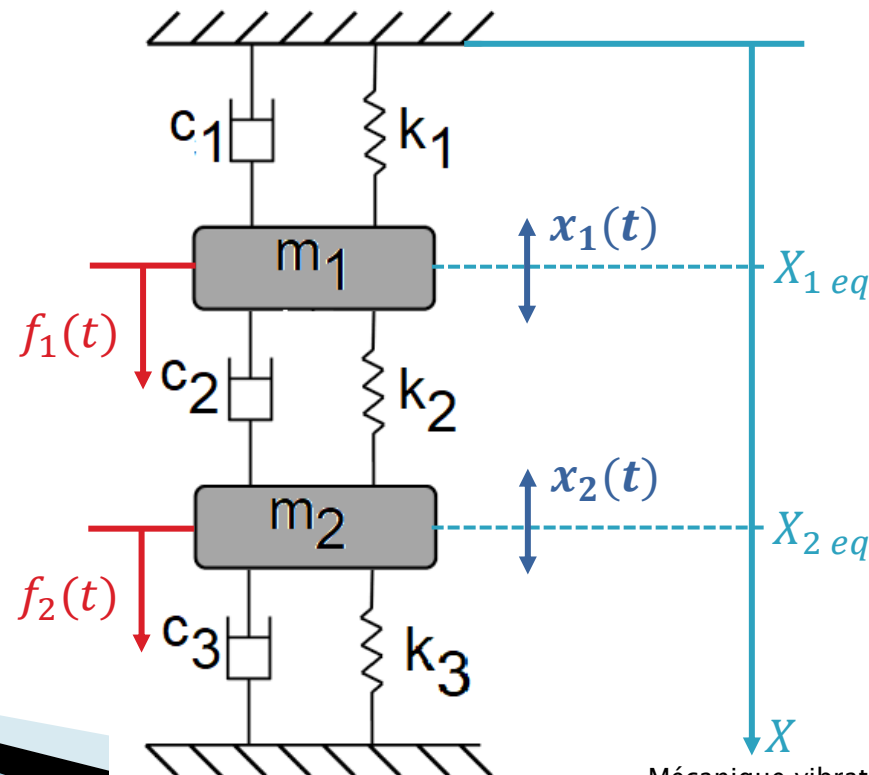
$$m_2 \ddot{x}_2(t) + c_2(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + k_2(x_2(t) - x_1(t)) + c_3 \dot{x}_2(t) + k_3 x_2(t) = f_2(t)$$

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

2. Modélisation et mise en équations d'un système à 2 degrés de liberté

- Bilan : système de deux équations pour les 2 ddl (déplacements vibratoires en translation), x_1 et x_2

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) + c_1 \dot{x}_1(t) + k_1 x_1(t) + c_2 (\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + k_2 (x_1(t) - x_2(t)) = f_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) + c_2 (\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + k_2 (x_2(t) - x_1(t)) + c_3 \dot{x}_2(t) + k_3 x_2(t) = f_2(t) \end{cases}$$



Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

3. Matrices de masse, de raideur et d'amortissement

- Les équations établies peuvent être écrites sous forme matricielle
- Soit $\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ le **vecteur des déplacements vibratoires**, $\{\dot{x}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}$ le **vecteur des vitesses vibratoires**, $\{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}$ le **vecteur des accélérations vibratoires** et $\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$ le **vecteur des forces excitatrices** appliquées sur m_1 et m_2
- Transformons le système d'équations en relation matricielle :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) + c_1 \dot{x}_1(t) + k_1 x_1(t) + c_2 (\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + k_2 (x_1(t) - x_2(t)) = f_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) + c_2 (\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + k_2 (x_2(t) - x_1(t)) + c_3 \dot{x}_2(t) + k_3 x_2(t) = f_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \{\ddot{x}\} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \{\dot{x}\} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \{x\} = \{f\}$$

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

3. Matrices de masse, de raideur et d'amortissement

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de masse } [M]} \{\ddot{x}\} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice d'amortissement } [C]} \{\dot{x}\} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de raideur } [K]} \{x\} = \{f\}$$

**Matrice de
masse** $[M]$

**Matrice
d'amortissement** $[C]$

Matrice de raideur
 $[K]$

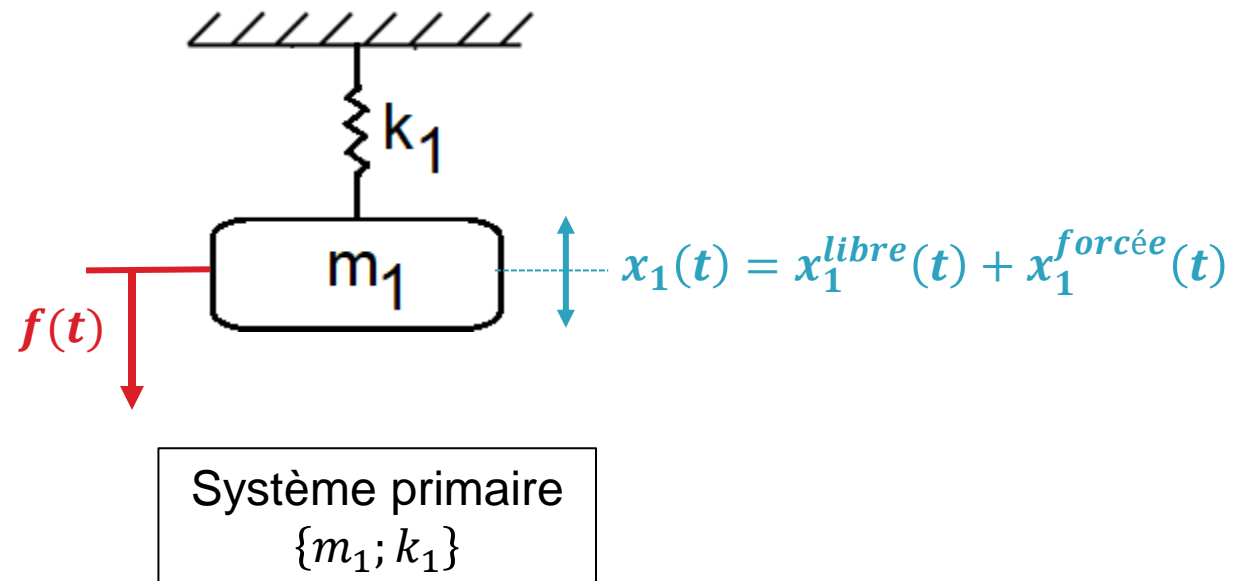
- Cette écriture peut bien sûr être généralisée pour N ddl, avec :
 - ↳ Matrice de masse : matrice carrée **diagonale** de dimension $N \times N$
 - ↳ Matrices d'amortissement et de raideur : matrices carrées **symétriques, définies positives**, de dimension $N \times N$
 - ↳ $\{f\}$ contient toutes les forces f_i appliquées aux « nœuds » (=centre de gravité des masses m_i), i variant de 1 à N
(composante f_i nulle si pas de force appliquée sur m_i)

Remarque : une matrice définie positive est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont réelles et strictement positives

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

4. Application concrète : l'étouffeur de vibrations

- Soit un oscillateur à **1 ddl et conservatif** schématisé par un système masse m_1 + ressort de raideur k_1
 - C'est le **système primaire**
- Cet oscillateur est soumis à une **force excitatrice sinusoïdale**, $f(t) = F \sin(\Omega t)$



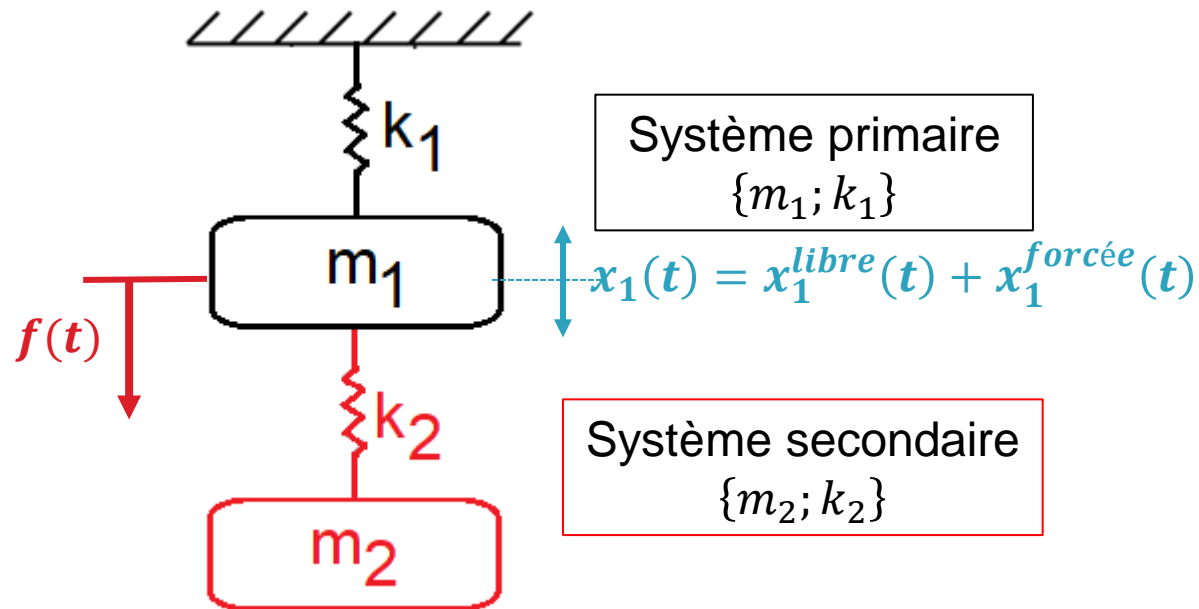
Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

4. Application concrète : l'étouffeur de vibrations

- On souhaite réaliser un **étouffeur de vibrations** (ou **absorbeur passif de vibrations**)

- Objectif : **éliminer les oscillations du système primaire dues à l'excitation**
- Principe : ajout d'un **système secondaire conservatif** (masse m_2 + ressort de raideur k_2)

On veut
 $x_1^{forcée} = 0$



4. Application concrète : l'étouffeur de vibrations

- Mise en équation de l'étouffeur :

↳ On reprend le principe exposé aux sections 2. et 3., avec $k_3 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$ et $f_2 = 0$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Ne pas perdre de vue que c'est la réponse forcée du système primaire que l'on souhaite annuler ; elle est de la forme $x_1^{forcée}(t) = A \sin(\Omega t)$ (puisque $f(t) = F \sin(\Omega t)$)
- Bien que le **système secondaire** ne subisse pas directement l'excitation, sa réponse « forcée » est **également sinusoïdale, à la pulsation Ω**

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

4. Application concrète : l'étouffeur de vibrations

- Exprimons les vecteurs sous forme exponentielle :

$$\{x^{forcée}(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{j\Omega t} = \{X\} e^{j\Omega t} \text{ et } \{f(t)\} = \begin{Bmatrix} F'_1 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{j\Omega t} = \{F'\} e^{j\Omega t} \text{ (avec } F'_1 = -j^{F/2})$$

- On en déduit : $-\Omega^2 [M]\{X\} e^{j\Omega t} + [K]\{X\} e^{j\Omega t} = \{F'\} e^{j\Omega t}$ et donc :

$$[K] - \Omega^2 [M] \{X\} = \{F'\}$$

- $[\alpha(\Omega)] = [K - \Omega^2 [M]]^{-1}$ est la **matrice de réceptance** et $\{X\} = [\alpha(\Omega)]\{F'\}$

- Connaissant les matrices de raideur et de masse, on peut exprimer $[\alpha(\Omega)]$:

$$[\alpha(\Omega)] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \Omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \Omega^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(k_1 + k_2 - m_1 \Omega^2)(k_2 - m_2 \Omega^2) - k_2^2} \begin{bmatrix} k_2 - m_2 \Omega^2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - m_1 \Omega^2 \end{bmatrix}$$

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

4. Application concrète : l'étouffeur de vibrations

- Pour annuler $x_1^{forcée}$, on cherche à avoir $X_1 = 0$
- Or, $X_1 = \alpha_{11}(\Omega)F'_1$ et donc

$$X_1 = \frac{k_2 - m_2\Omega^2}{(k_1 + k_2 - m_1\Omega^2)(k_2 - m_2\Omega^2) - k_2^2} F'_1$$

- Pour annuler la réponse du système primaire due à l'excitation sinusoïdale on doit donc avoir :

$$k_2 = m_2\Omega^2$$

4. Application concrète : l'étouffeur de vibrations

$$k_2 = m_2 \Omega^2$$

- On a alors $\alpha_{21} \left(\Omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \right) = \frac{-1}{k_2}$ et donc $X_2 = \frac{-F'_{11}}{k_2}$ ne dépend pas de m_2
 - ↳ Dans la pratique **on choisit donc la valeur de k_2 pour limiter X_2**
 - ↳ Ensuite **on ajuste m_2 de sorte que $m_2 = \frac{k_2}{\Omega^2}$**

L'étouffeur de vibrations est bien réalisé !

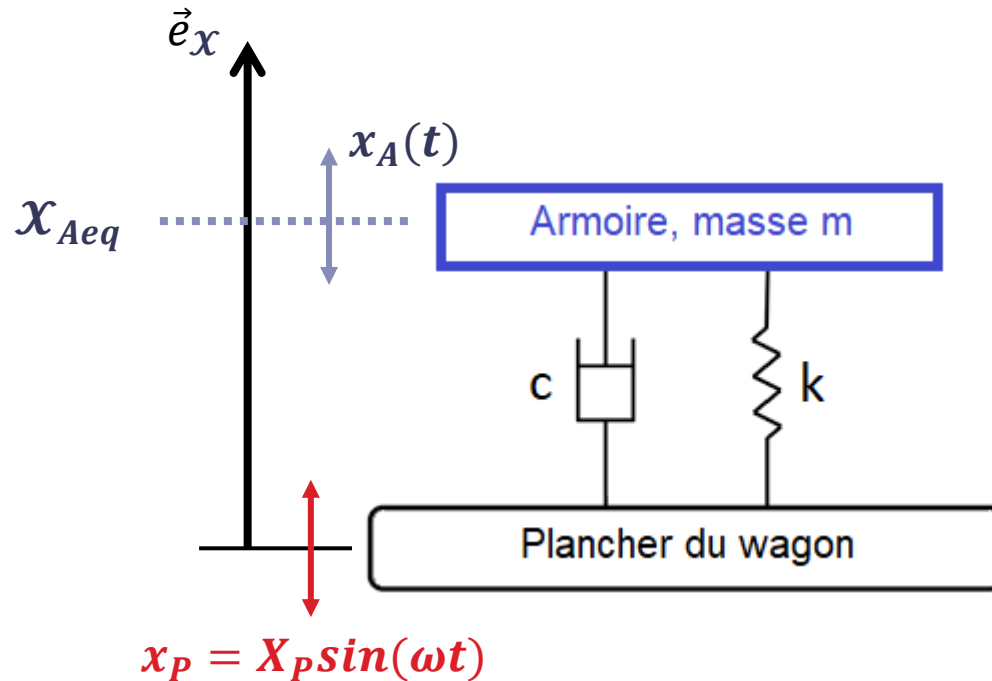
5. Application concrète : transmissibilité

- La présence d'un balourd sur une roue provoque une mise en oscillations forcées d'un wagon
 - ↳ Cela se traduit par un **déplacement vertical sinusoïdal au niveau du plancher du wagon**, $x_p(t) = X_p \sin(\omega t)$
- **On cherche à limiter la transmission des vibrations à une armoire électrique** fixée au sol du wagon, celle-ci repose donc sur un **plancher amortisseur**, que l'on peut modéliser par un **ressort de raideur k et un amortisseur de viscosité c**
- L'amplitude du déplacement vibratoire de l'armoire est notée X_A
- **Déterminez la transmissibilité de l'amplitude des vibrations, ici définie par le rapport X_A/X_p**

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

5. Application concrète : transmissibilité

• Schéma



• Méthode ?

- Appliquer le PFD pour l'armoire
- Utiliser l'approximation $\sin(\omega t) \sim e^{j\omega t}$

Transmissibilité : résultat

• On trouve : $\frac{X_A}{X_P} = \left[\frac{\omega_0^4 + (2\xi\omega_0\omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2} \right]^{1/2}$

• Oscillateur conservatif ($\xi = 0$) : la transmissibilité tend vers l'infini en $\omega = \omega_0$

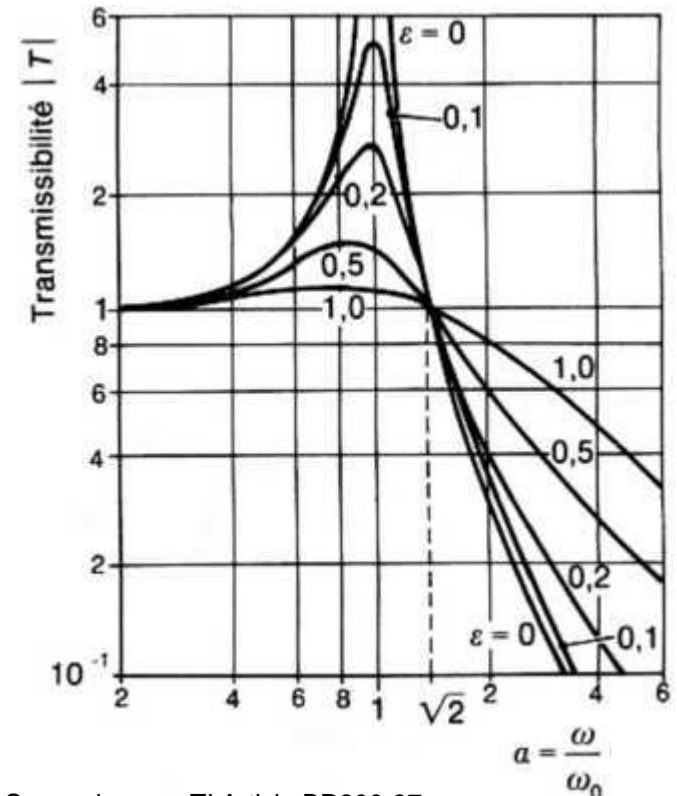
• Autres cas :

• Si $\omega/\omega_0 \in [0; \sqrt{2}]$: $\frac{X_A}{X_P} > 1$ quel que soit ξ

→ **Amplification** du déplacement vibratoire transmis à l'armoire

• Si $\frac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2}$: $\frac{X_A}{X_P} < 1$ et tend vers 0

→ **Atténuation** du déplacement vibratoire transmis à l'armoire, **d'autant plus importante que l'amortissement est élevé**



Source image : TI Article BR200-37

Démonstration

- L'oscillateur étudié est composé de l'armoire, de masse m , et du plancher amortissant, modélisé par un ressort de raideur k et un amortisseur de viscosité c reliés au plancher du wagon

- L'armoire subit :

↳ Son poids : $-mg \vec{e}_x$

↳ La force de rappel du ressort : $-k(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_P - l_0) \vec{e}_x$

Avec \mathbf{x}_A et \mathbf{x}_P les positions de l'armoire et du plancher dans le repère global

↳ La force visqueuse de l'amortisseur : $-c(\dot{\mathbf{x}}_A - \dot{\mathbf{x}}_P) \vec{e}_x$

- A l'équilibre statique, $\mathbf{x}_A = \mathbf{x}_{A eq}$, $\mathbf{x}_P = 0$ et $\dot{\mathbf{x}}_A = \dot{\mathbf{x}}_P = 0$

↳ On a donc (projection selon \vec{e}_x) : $-mg - k(\mathbf{x}_{A eq} - l_0) = 0$

- PFD : $m\ddot{\mathbf{x}}_A = -mg - k(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_P - l_0) - c(\dot{\mathbf{x}}_A - \dot{\mathbf{x}}_P - l_0)$

$$\Rightarrow m\ddot{\mathbf{x}}_A = k(\mathbf{x}_{A eq} - l_0) - k(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_P - l_0) - c(\dot{\mathbf{x}}_A - \dot{\mathbf{x}}_P - l_0)$$

$$\Rightarrow m\ddot{\mathbf{x}}_A = k(\mathbf{x}_{A eq} - \mathbf{x}_A + \mathbf{x}_P) - c(\dot{\mathbf{x}}_A - \dot{\mathbf{x}}_P)$$

↓
 $\ddot{\mathbf{x}}_A$

— \mathbf{x}_A —

↓
 \mathbf{x}_P

— $\dot{\mathbf{x}}_A - \dot{\mathbf{x}}_P$ —

Démonstration (suite)

- D'où : $m\ddot{x}_A + k(x_A - x_P) + c(\dot{x}_A - \dot{x}_P) = 0$ ou encore $m\ddot{x}_A + kx_A + c\dot{x}_A = kx_P + c\dot{x}_P$
- On divise par m : $\ddot{x}_A + \frac{k}{m}x_A + \frac{c}{m}\dot{x}_A = \frac{k}{m}x_P + \frac{c}{m}\dot{x}_P$, et on rappelle que $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ et $\frac{c}{m} = 2\xi\omega_0$, ce qui donne :

$$\ddot{x}_A + \omega_0^2 x_A + 2\xi\omega_0 \dot{x}_A = \omega_0^2 x_P + 2\xi\omega_0 \dot{x}_P$$

- Posons $x_P = X_P \sin(\omega t) \sim X_P e^{j\omega t}$ et supposons que x_A est du même type, avec $x_A \sim X_A e^{j\omega t}$, et injections ces expressions dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} j^2 \omega^2 X_A e^{j\omega t} + \omega_0^2 X_A e^{j\omega t} + 2\xi\omega_0 j\omega X_A e^{j\omega t} &= \omega_0^2 X_P e^{j\omega t} + 2\xi\omega_0 j\omega X_P e^{j\omega t} \\ \Rightarrow X_A(-\omega^2 + \omega_0^2 + 2\xi\omega_0 j\omega) &= X_P(\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 j\omega) \end{aligned}$$

- On doit vérifier l'égalité des modules, c'est-à-dire :

$$X_A \sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (2\xi\omega_0 \omega)^2} = X_P \sqrt{(\omega_0^2)^2 + (2\xi\omega_0 \omega)^2}$$

→ D'où le résultat : $\frac{X_A}{X_P} = \left[\frac{\omega_0^4 + (2\xi\omega_0 \omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0 \omega)^2} \right]^{1/2}$

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

6. Généralisation à N ddl : notions de modes propres et de déformées modales

- Soit un système à N ddl, $x_i(t)$ (i de 1 à N) : les x_i sont les déplacements vibratoires à chaque point du maillage, i , auquel est associé la masse m_i
Remarque : on note x_i chaque degré de liberté mais ils ne sont pas nécessairement tous dans la même direction, ni même en translation
- On note $f_i(t)$ les forces excitatrices s'exerçant sur chaque masse m_i
- On a pu établir le système d'équations suivant :

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}$$

Avec

- $\{x(t)\}$ et $\{f(t)\}$ les vecteurs des déplacements vibratoires, $x_i(t)$, et des forces excitatrices, $f_i(t)$, respectivement, de dimension $N \times 1$
- $[M]$, $[C]$ et $[K]$ les matrices de masse, amortissement et raideur, respectivement, de dimension $N \times N$

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

6. Généralisation à N ddl : notions de modes propres et de déformées modales

- On définit la matrice de raideur normalisée par la matrice de masse :
$$[\tilde{K}] = [M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2}$$
- On peut démontrer (voir annexe) que **les valeurs propres de $[\tilde{K}]$ sont des réels strictement positifs** : on les note $\tilde{\omega}_i^2$ (i variant de 1 à N)
- Les **vecteurs propres associés, \vec{u}_i , constituent la base modale**
- On peut alors définir la **matrice de passage de la base physique vers la base modale** : $[P] = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_N]$ (dimension $N \times N$)

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

6. Généralisation à N ddl : notions de modes propres et de déformées modales

- Notons $\{r(t)\}$ le vecteur des **coordonnées modales** tel que $\{x(t)\} = [M]^{-1/2}[P]\{r(t)\}$ ou encore $\{x(t)\} = [\Phi]\{r(t)\}$
- $[\Phi]$ est la matrice des vecteurs de **déformées modales**
 - Le **déplacement vibratoire** de la masse m_i , $x_i(t)$, est tel que $x_i(t) = \sum_j \Phi_{ij} r_j(t)$
 - On va voir que chaque **coordonnée modale**, $r_j(t)$, peut être calculée en fonction de l'excitation imposée au point j
 - On dit que Φ_{ij} est le **vecteur de déformée modale** du mode j
 - Enfin, on peut noter que $[\Phi]^{-1} = ([M]^{-1/2}[P])^{-1} = [P]^{-1}[M]^{1/2} = [P]^T[M]^{1/2}$

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

6. Généralisation à N ddl : notions de modes propres et de déformées modales

- On rappelle que les $\tilde{\omega}_i^2$ sont les valeurs propres de $[\tilde{K}]$
- De la même façon, posons $[\tilde{C}] = [M]^{-1/2}[C][M]^{-1/2}$ et notons $2\tilde{\xi}_i\tilde{\omega}_i$ ses valeurs propres
- On aboutit à :

$$[I]\{\ddot{\mathbf{r}}(t)\} + \mathit{diag}(2\tilde{\xi}_i\tilde{\omega}_i)\{\dot{\mathbf{r}}(t)\} + \mathit{diag}(\tilde{\omega}_i^2)\{\mathbf{r}(t)\} = \{\mathbf{f}_{mod}(t)\}$$

avec $\{\mathbf{f}_{mod}(t)\} = [P]^T [M]^{-1/2}\{\mathbf{f}(t)\}$: le **vecteur des forces modales**
et \mathbf{r} le **vecteur de coordonnées modales** (défini juste avant)

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

6. Généralisation à N ddl : notions de modes propres et de déformées modales

Démonstration

- Reprenons notre système matriciel, $[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}$, avec $\{x(t)\} = [M]^{-1/2}[P]\{r(t)\}$ et multiplions à gauche par $[P]^T[M]^{-1/2}$:

$$[P]^T[M]^{-1/2}[M][M]^{-1/2}[P]\{\ddot{r}(t)\} + [P]^T[M]^{-1/2}[C][M]^{-1/2}[P]\{\dot{r}(t)\} + [P]^T[M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2}[P]\{r(t)\} = [P]^T[M]^{-1/2}\{f(t)\}$$

⇒

$$[I]\{\ddot{r}(t)\} + [P]^T[M]^{-1/2}[C][M]^{-1/2}[P]\{\dot{r}(t)\} + [P]^T[\tilde{K}][P]\{r(t)\} = [P]^T[M]^{-1/2}\{f(t)\}$$

(en remarquant que $[P]^T[P] = [I]$ car $[P]^T = [P]^{-1}$)

- Par définition de $[P]$, $[P]^T[\tilde{K}][P] = \text{diag}(\tilde{\omega}_i^2)$ (on rappelle que les $\tilde{\omega}_i^2$ sont les valeurs propres de $[\tilde{K}]$)
- De la même façon, posons $[\tilde{C}] = [M]^{-1/2}[C][M]^{-1/2}$ et notons $2\tilde{\xi}_i\tilde{\omega}_i$ ses valeurs propres
- On aboutit à : $[I]\{\ddot{r}(t)\} + \text{diag}(2\tilde{\xi}_i\tilde{\omega}_i)\{\dot{r}(t)\} + \text{diag}(\tilde{\omega}_i^2)\{r(t)\} = \{f_{mod}(t)\}$ avec $\{f_{mod}(t)\} = [P]^T[M]^{-1/2}\{f(t)\}$: le **vecteur des forces modales**

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

6. Généralisation à N ddl : notions de modes propres et de déformées modales

- Ce système se compose de N équations découplées :

$$\ddot{r}_i(t) + 2\tilde{\xi}_i\tilde{\omega}_i\dot{r}_i(t) + \tilde{\omega}_i^2 r_i(t) = f_{mod\ i}(t)$$

- On reconnaît l'équation différentielle établie pour un système à 1 ddl, on peut donc exprimer les $r_i(t)$:

$$\rightarrow r_i(t) = A_i e^{-\tilde{\xi}_i\tilde{\omega}_i t} \sin(\tilde{\omega}_{1i} t + \varphi_i) + B_i \sin(\Omega_i t + \theta_i) \text{ si } f_{mod\ i}(t) = F_{mod\ i} \sin(\Omega_i t) \\ (A_i, B_i, \varphi_i, \theta_i \in \mathbb{R})$$

$$\rightarrow \text{En régime permanent : } r_i(t) = B_i \sin(\Omega_i t + \theta_i) \text{ avec } B_i = \frac{F_{mod\ i}}{\sqrt{(\tilde{\omega}_i^2 - \Omega_i^2)^2 + (2\Omega_i\tilde{\omega}_i\tilde{\xi}_i)^2}}$$

- On peut définir la **fonction de transfert modale** (ou **réceptance modale**) complexe :

$$\alpha_i(\Omega) = \frac{1}{(\tilde{\omega}_i^2 - \Omega^2) + 2j\Omega\tilde{\omega}_i\tilde{\xi}_i}$$

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

6. Généralisation à N ddl : notions de modes propres et de déformées modales

- Retour dans la base physique :

- ↳ On a déterminé $\{r(t)\}$ le vecteur des **coordonnées modales**

- ↳ Les **coordonnées « physiques »** sont alors telles que $\{x(t)\} = [M]^{-1/2}[P]\{r(t)\}$

- A noter :

- ↳ Si on a un seul point d'excitation (par exemple au point 1), alors (en régime permanent) seule la coordonnée modale $r_1(t)$ est non nulle (cf diapo précédentes : les N équations sont découplées)

- ↳ En revanche les déplacements vibratoires $x_i(t)$ pour $i \neq 1$ ne sont pas nuls car

$$\{x(t)\} = [M]^{-1/2}[P]\{r(t)\} \text{ et donc } x_i(t) = M_{ii}^{-\frac{1}{2}} P_{i1} r_1(t) = \frac{P_{i1}}{\sqrt{m_i}} r_1(t) \quad \forall i$$

EN RESUME

Système d'équations différentielles pour les déplacements vibratoires des masses m_i , $x_i(t)$ ($i \in \{1, \dots, N\}$) : $[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\}$
 $\{f\}$ étant le vecteur des forces appliquées sur les masses m_i

Expression de la matrice de raideur normalisée par la matrice de masse, $[\tilde{K}]$

- Ses vecteurs propres, \vec{u}_i , constituent la **base modale**
- $[P] = [\vec{u}_1 \dots \vec{u}_N]$ est la matrice de passage de la base physique vers la base modale
- Ses **valeurs propres sont $\tilde{\omega}_i^2$**

Expression de la matrice d'amortissement normalisée, $[\tilde{C}]$

- Ses **valeurs propres sont $2\tilde{\xi}_i\tilde{\omega}_i$**

Résolution des **N équations différentielles indépendantes** $\ddot{r}_i(t) + 2\tilde{\xi}_i\tilde{\omega}_i\dot{r}_i(t) + \tilde{\omega}_i^2 r_i(t) = f_{mod i}(t)$
 $\{r\}$ le vecteur des coordonnées modales et $\{f_{mod}(t)\} = [P]^T [M]^{-1/2} \{f(t)\}$ le vecteur des forces modales

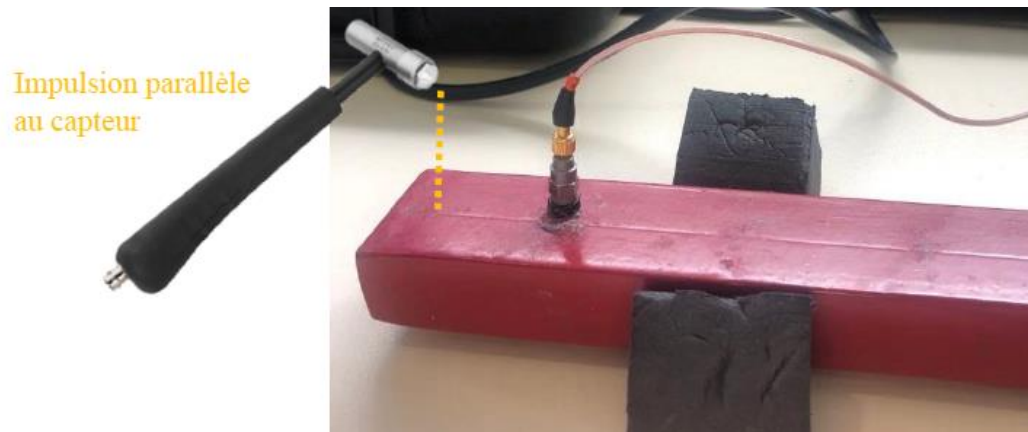
Retour dans la base « réelle » pour **obtenir les déplacements vibratoires !**

Soit $[\Phi] = [M]^{-1/2}[P]$, alors :
 $\{x(t)\} = [\Phi]\{r(t)\}$, c'est-à-dire $x_i(t) = \sum_j \Phi_{ij} r_j(t)$

Chapitre 4 – Vers des systèmes à N ddl

Illustration : déformée d'une poutre – modes de flexion (TP)

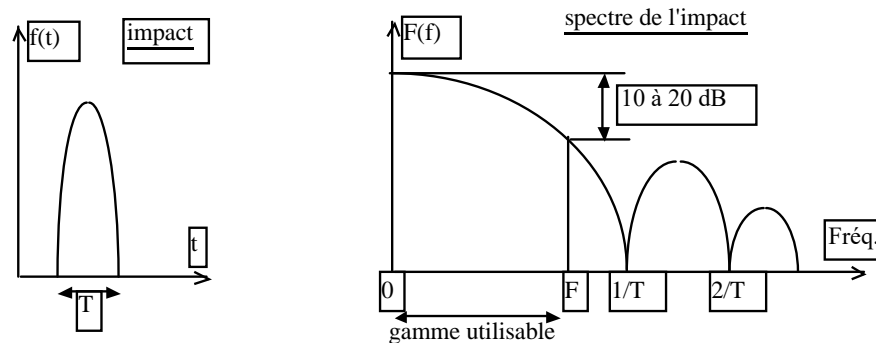
- On peut donc déterminer les déplacements vibratoires $x_i(t)$ en tout point i lorsqu'on impose une force excitatrice en un ou plusieurs points
 - Les fréquences de résonance sont caractéristiques d'une structure dans son intégralité
 - Le déplacement vibratoire en réponse à une excitation n'est pas le même partout : c'est la **déformée**
- Exemple : étude d'une poutre au marteau d'impact



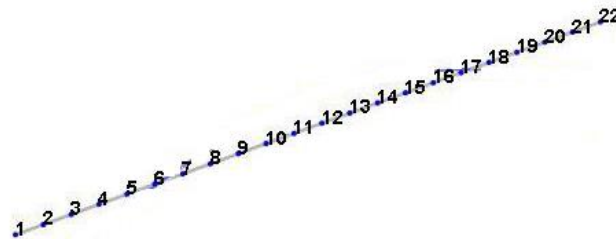
Déformée d'une poutre – modes de flexion

- Rappel : un impact marteau => **excitation d'une structure sur toute la gamme de fréquence utilisable**

- Revient à imposer **simultanément toutes les excitations sinusoïdales**
 $g(t) = G_i \sin(2\pi f_i t)$ pour une fréquence f_i de 0 à la fin de la gamme utilisable



- Simultanément on mesure le déplacement (ou plus souvent l'accélération) en différents points de la structure (maillage)



Exemple : poutre discrétisée en 22 points

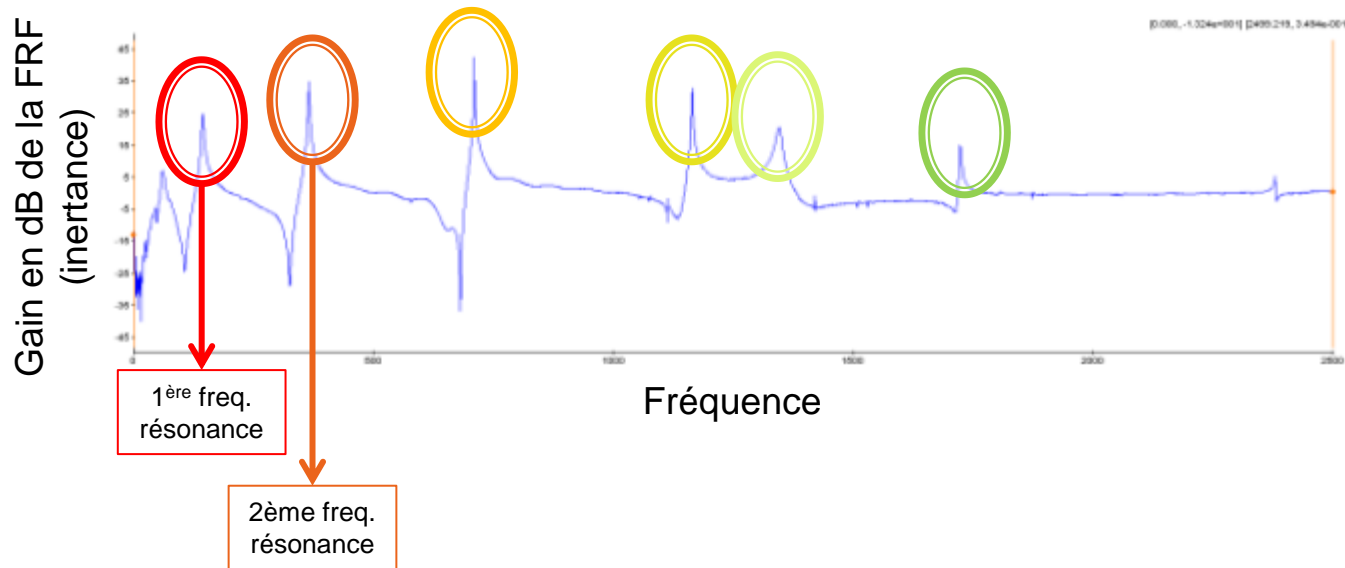
Remarque : complètement équivalent au fait de mesurer le déplacement (ou l'accélération) en un point fixe, en faisant varier le point d'application de l'impact

Déformée d'une poutre – modes de flexion

● Etape 1 : Diagramme de Bode de la poutre

➤ On identifie les **fréquences de résonance** qui caractérisent la poutre dans son intégralité

➤ Ce seront donc **les mêmes quel que soit le point étudié**



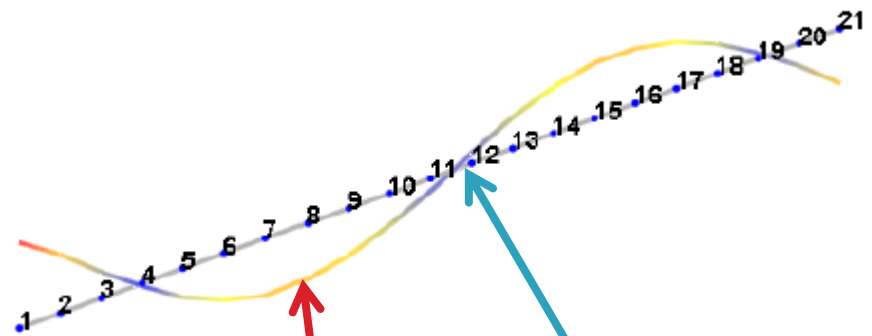
Déformée d'une poutre – modes de flexion

- Etape 2 : Observation ou simulation de la **déformée**
 - C'est le **déplacement vibratoire** en un point de la structure sous l'effet d'une **excitation à une fréquence précise**
 - Amplitude très faible si cette fréquence n'est pas une fréquence de résonance
 - Très importante dans le cas contraire

Exemple

Simulation de la déformée de la poutre pour une **excitation à la seconde fréquence de résonance** détectée

- On impose $g(t) = G_2 \sin(2\pi f_2 t)$ au point 2
- On visualise ici les déplacements vibratoires verticaux qui en résultent, en tout point du maillage



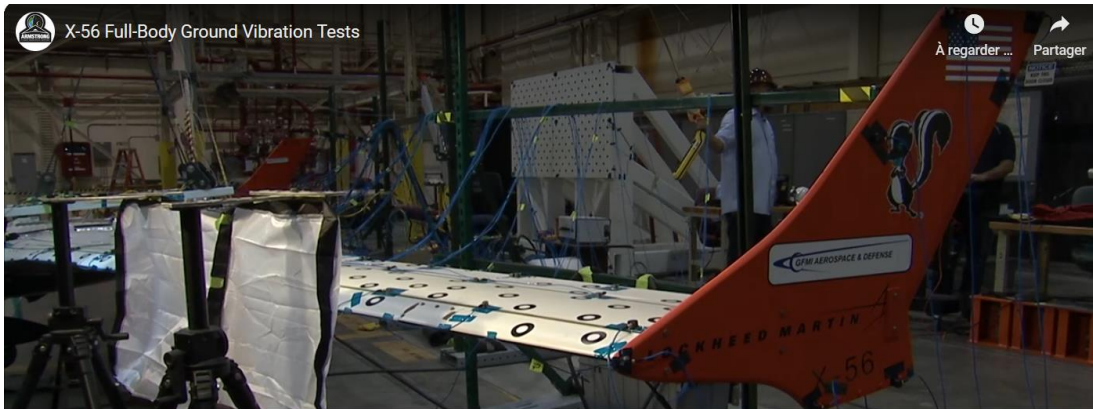
Nœud de vibration

Ventre de vibration

Et c'est fini !!!!!

- Des petites vidéos pour la fin 😊

<https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=video&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjJp6e9yfT7AhVfXaQEHUWCB3oQtwJ6BAgFEAI&url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DqwyINMeJHp4&u sg=AOvVaw2crOKCdZYTgEWKmwIVvjHP>



Etude vibratoire en conditions libre-libre

https://twitter.com/stephane_fort/status/953373975211642880

L'aéroélasticité



Démonstration pour la page 22

- On veut démontrer que les valeurs propres de $[\tilde{K}]$ sont des réels strictement positifs
- Rappel : $[K]$ est une matrice de dimension $N \times N$ définie positive, cad par définition une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives
- Cette propriété est équivalente au fait que pour tout vecteur $\{A\}$ de dimension $N \times 1$ et à composantes non nulles $\{A\}^T [K] \{A\} > 0$
 - Soit λ_i ($i = 1 \dots N$) les valeurs propres de $[K]$, il existe une base orthonormée $[Q]$ telle que $[K] = [Q][\Lambda][Q]^T$ avec $[\Lambda]$ la matrice diagonale telle que $\Lambda_{ii} = \lambda_i$ ($i = 1 \dots N$)
 - Alors $\{A\}^T [K] \{A\} = \{A\}^T [Q][\Lambda][Q]^T \{A\} = ([Q]^T \{A\})^T [\Lambda] [Q]^T \{A\} = \{B\}^T [\Lambda] \{B\}$
 - $\{B\}^T [\Lambda] \{B\} = \sum_{ij} B_i \Lambda_{ij} B_j = \sum_i B_i \lambda_i B_i = \sum_i B_i^2 \lambda_i > 0$ si $\lambda_i > 0 \forall i$ ($B_i \neq 0 \forall i$)
 - On en déduit : $\lambda_i > 0 \forall i \Rightarrow \{A\}^T [K] \{A\} > 0 \forall \{A\}$ à composantes non nulles

Démonstration pour la page 22

- Réciproquement, si on a $\{A\}^T [K] \{A\} > 0 \forall \{A\}$ à composantes non nulles alors c'est a fortiori vrai pour tout vecteur propre de $[K]$, $\{P_i\}$

↳ Par définition : $[K] \{P_i\} = \lambda_i \{P_i\}$

↳ $\{P_i\}^T [K] \{P_i\} > 0$ et $\{P_i\}^T [K] \{P_i\} = \lambda_i \{P_i\}^T \{P_i\} > 0$

↳ Ainsi, $\{A\}^T [K] \{A\} > 0 \forall \{A\}$ à composantes non nulles $\Rightarrow \lambda_i > 0 \forall i$

- Finalement :

$\lambda_i > 0 \forall i \Leftrightarrow \{A\}^T [K] \{A\} > 0 \forall \{A\}$ à composantes non nulles
avec λ_i les valeurs propres de $[K]$

Démonstration pour la page 22

- $[\tilde{K}] = [M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2}$ et soit $\{A\}$ un vecteur de dimension $N \times 1$ à composantes non nulles :

↳ $\{A\}^T [\tilde{K}] \{A\} = \{A\}^T [M]^{-1/2} [K] [M]^{-1/2} \{A\} = ([M]^{-1/2} \{A\})^T [K] [M]^{-1/2} \{A\}$ car $[M]$ étant diagonale $([M]^{-1/2})^T = [M]^{-1/2}$

↳ Les composantes du vecteur $[M]^{-1/2} \{A\}$ sont aussi non nulles

↳ $[K]$ étant définie positive on en déduit $([M]^{-1/2} \{A\})^T [K] [M]^{-1/2} \{A\} > 0$ et donc $\{A\}^T [\tilde{K}] \{A\} > 0$

- Finalement :

Toutes les valeurs propres de $[\tilde{K}]$ sont strictement positives