

Bruits et Vibrations

Chapitre 3

Analyse modale d'un système à 1 degré de liberté

Analyse modale : pourquoi faire ?

- Dans les chapitres précédents, on a étudié la **réponse temporelle** (déplacement vibratoire $x(t)$) d'un oscillateur (à 1 degré de liberté)
- En oscillations forcées, $x(t)$ s'exprime **facilement** dans le cas où la structure subit une **excitation périodique** :
 - Grâce à une décomposition en **série de Fourier**, **toute force périodique peut être décomposée en une somme d'excitations sinusoïdales simples**
 - On a établi l'expression du déplacement vibratoire provoqué par une excitation sinusoïdale simple

RAPPEL

Soit une excitation sinusoïdale, $f(t) = F \sin(\Omega t)$, la réponse forcée (= déplacement vibratoire en **régime permanent**) d'un oscillateur **dissipatif** est donnée par :

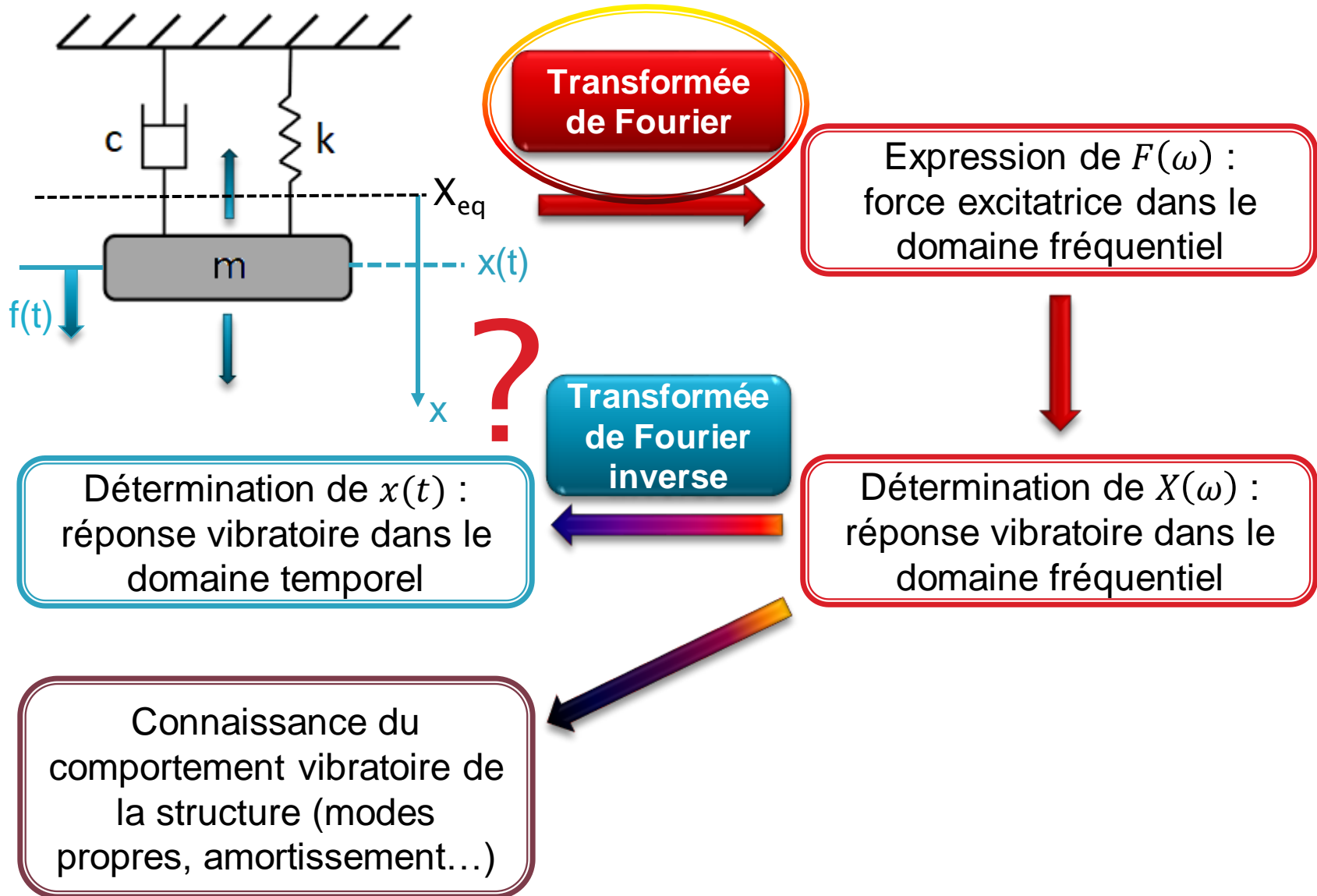
$$x(t) = X \sin(\Omega t + \varphi), \text{ avec } X = \frac{F}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \text{ et } \varphi = \arctan\left(\frac{-c\Omega}{k-m\Omega^2}\right)$$

Oscillateur conservatif (pour $\Omega \neq \omega_0$) : $x(t) = X \sin(\omega_0 t)$, avec $X = \frac{F}{k-m\Omega^2}$
et pour $\Omega = \omega_0$: $x(t) = \frac{F}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$

Analyse modale : pourquoi faire ?

- ⦿ **Problème ! Les fonctions non-périodiques ne peuvent pas être décomposées en série de Fourier**
 - ➔ **La réponse temporelle à une excitation non-périodique ne peut pas être exprimée directement**
- ⦿ **L'analyse modale** permet d'établir un modèle mathématique du comportement de la structure qui permet :
 - ➔ De **déterminer sa réponse fréquentielle**
 - ➔ De **retrouver sa réponse temporelle**
- ⦿ Nous verrons que pour des systèmes à 1ddl, les relations établies par analyse modale ou par analyse temporelle sont très proches

Analyse modale : principe



Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

1. Transformée de Fourier et définition de la FRF

1.1 Définition de la transformée de Fourier

- Soit une fonction $f(t)$ définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{C} et intégrable (i.e. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$), sa **transformée de Fourier** est :

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Passage du domaine temporel au domaine fréquentiel ($\omega = 2\pi f$)

Où ω est la pulsation ($\omega = 2\pi f$, f =fréquence)

On a donc une fonction F qui évolue en fonction de ω ou f : **domaine fréquentiel**

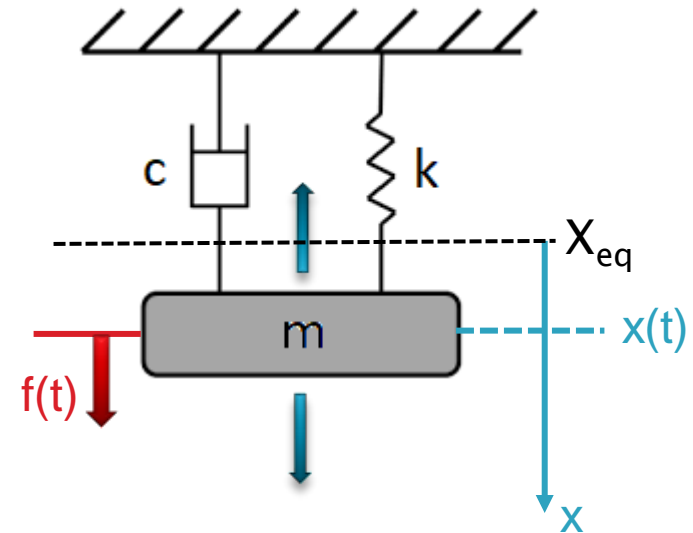
- La **transformée de Fourier inverse** (pour revenir dans le domaine temporel) est telle que : $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

1. Transformée de Fourier et définition de la FRF

1.2 Transformée de Fourier de l'équation différentielle

- On considère la schématisation ci-contre du comportement vibratoire à 1 ddl d'une structure
- Il s'agit d'un oscillateur dissipatif, en amortissement sous-critique
- Equation différentielle pour le déplacement vibratoire, $x(t)$: $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$



Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

1. Transformée de Fourier et définition de la FRF

1.2 Transformée de Fourier de l'équation différentielle

- Posons $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, $\dot{X}(\omega) = \mathcal{F}\{\dot{x}(t)\}$ et $\ddot{X}(\omega) = \mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\}$, les transformées de Fourier du déplacement vibratoire, de la vitesse vibratoire et de l'accélération vibratoire, respectivement

$$\hookrightarrow \dot{X}(\omega) = -x(0) + j\omega X(\omega)$$

$$\hookrightarrow \ddot{X}(\omega) = -\dot{x}(0) - j\omega x(0) - \omega^2 X(\omega)$$

- On aboutit ainsi à la **transformée de Fourier de l'équation différentielle**, en considérant $x(0) = \dot{x}(0) = 0$:

$$-m\omega^2 X(\omega) + jc\omega X(\omega) + kX(\omega) = F(\omega)$$

Avec $F(\omega)$ la transformée de Fourier de la force excitatrice, $f(t)$.

Et donc :

$$[k - m\omega^2 + jc\omega]X(\omega) = F(\omega)$$

j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$

Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

DEMONSTRATION

• Par définition : $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$, $\dot{X}(\omega) = \int_0^{+\infty} \dot{x}(t)e^{-j\omega t} dt$ et $\ddot{X}(\omega) = \int_0^{+\infty} \ddot{x}(t)e^{-j\omega t} dt$

• Par intégration par parties,

$$\dot{X}(\omega) = \int_0^{+\infty} \dot{x}(t)e^{-j\omega t} dt = [x(t)e^{-j\omega t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x(t)(-j\omega)e^{-j\omega t} dt, \text{ et donc :}$$
$$\dot{X}(\omega) = -x(0) + j\omega X(\omega)$$

• De la même façon,

$$\ddot{X}(\omega) = \int_0^{+\infty} \ddot{x}(t)e^{-j\omega t} dt = [\dot{x}(t)e^{-j\omega t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \dot{x}(t)(-j\omega)e^{-j\omega t} dt$$
$$\Rightarrow \ddot{X}(\omega) = -\dot{x}(0) + j\omega(\dot{X}(\omega)), \text{ d'où :}$$
$$\ddot{X}(\omega) = -\dot{x}(0) - j\omega x(0) - \omega^2 X(\omega)$$

• Et donc : transformée de Fourier de l'équation différentielle,

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t), \text{ en considérant } x(0) = \dot{x}(0) = 0 :$$
$$-m\omega^2 X(\omega) + jc\omega X(\omega) + kX(\omega) = F(\omega)$$

remarque : les intégrales partent de 0 car les fonctions ne sont pas définies pour $t < 0$

Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

1. Transformée de Fourier et définition de la FRF

1.3 FRF : fonction de réponse en fréquence

- La **fonction de réponse en fréquence (FRF)** pour un oscillateur harmonique est définie, en **régime permanent**, par :

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)}$$

Où $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ et $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$

- Et donc pour un oscillateur à **1 ddl** :

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + jc\omega}$$

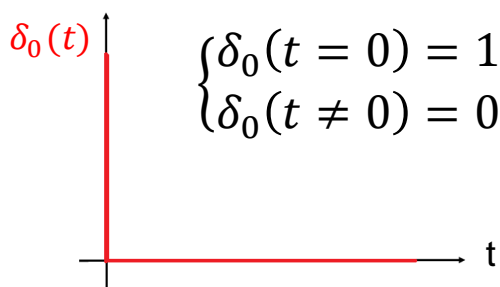
La réponse vibratoire à une excitation dépend toujours de la fréquence/pulsation de l'excitation

- On peut remarquer que $X(\omega) = H(\omega) F(\omega)$; pour retrouver la réponse temporelle on pourra alors utiliser la relation $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} H(\omega) F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

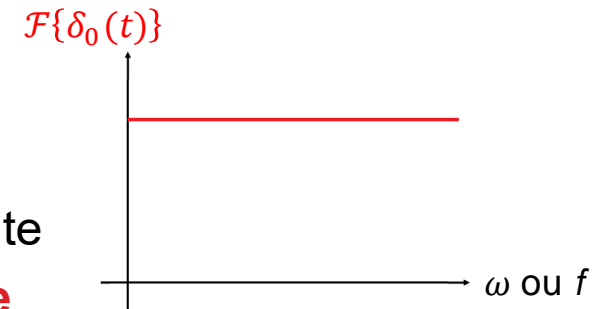
Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

2. Réponse impulsionnelle et test au marteau d'impact

- Soit une **excitation impulsionnelle**, décrite par un signal de type **Dirac** :


$$\begin{cases} \delta_0(t = 0) = 1 \\ \delta_0(t \neq 0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{\delta_0(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t) e^{-j\omega t} dt = e^0 = 1$$

- La transformée de Fourier d'un Dirac est une constante
- Autrement dit : **un signal impulsionnel a un spectre en fréquence couvrant toutes les fréquences**



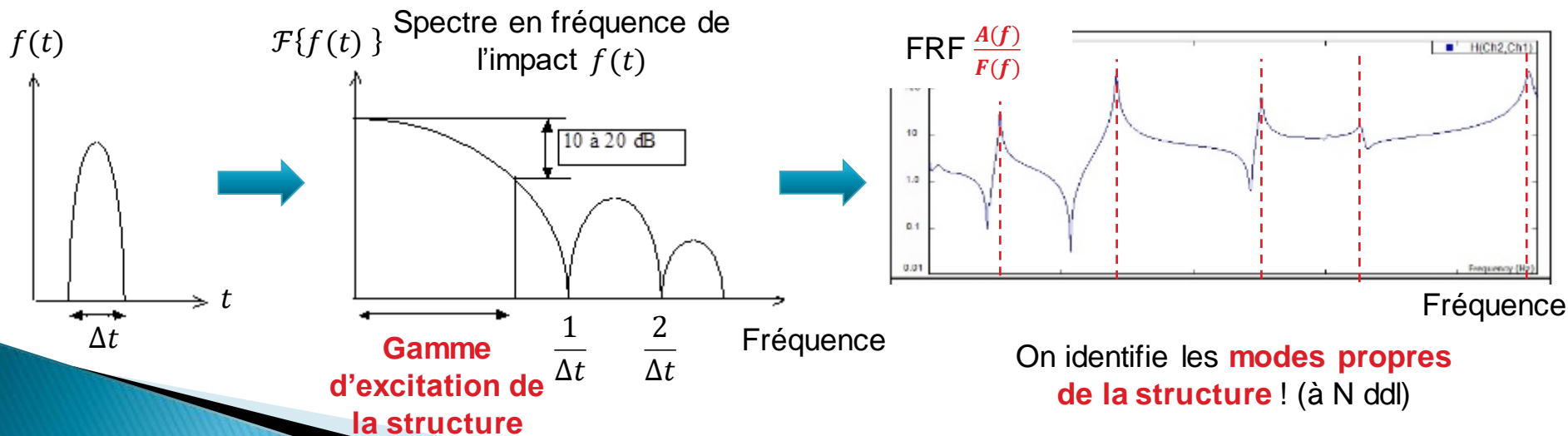
- Conséquence 1 : si on applique un signal impulsionnel à un oscillateur harmonique, on a $X^{Dirac}(\omega) = H(\omega)\mathcal{F}\{\delta_0(t)\}$ et donc **$X^{Dirac}(\omega) = H(\omega)$**

La FRF $H(\omega)$ peut donc être exprimée comme la réponse fréquentielle de l'oscillateur à une excitation impulsionnelle de Dirac

Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

2. Réponse impulsionnelle et test au marteau d'impact

- Conséquence 2 : application pratique : **test au marteau d'impact**
- Principe : si on applique sur une structure à caractériser un **effort de type Dirac** alors **la structure sera sollicitée pour toutes les fréquences simultanément**
 - ➔ **L'étude des FRF permet alors de déterminer tous les modes propres de la structure !**
- En pratique, quand on « tape » avec un marteau, le signal force (enregistré par une cellule d'effort dans le marteau) n'est pas tout à fait un Dirac, il a un **étalement temporaire** ; son spectre en fréquence a alors l'allure d'un **sinus cardinal** :



Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

3. Réponse à une excitation sinusoïdale $f(t) = F \sin(\Omega t)$

3.1. Détermination de la FRF en déplacement par une analyse temporelle

- Pour un oscillateur à 1 ddl, il est aisé de retrouver l'expression de la FRF en déplacement (obtenue par transformée de Fourier de l'équation différentielle) par une analyse des réponses temporelles, en utilisant l'approximation par des exponentielles
- Soit donc un oscillateur **dissipatif à 1 ddl en oscillations forcées, en régime permanent**
 - ↳ On considère une excitation sinusoïdale simple : $f(t) = F \sin(\Omega t)$ ($F \in \mathbb{R}$)
 - ↳ Le déplacement vibratoire est du type $x(t) = x^{forcée}(t) = X \sin(\Omega t + \varphi)$ ($F, \varphi \in \mathbb{R}$)

Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

3. Réponse à une excitation sinusoïdale $f(t) = F \sin(\Omega t)$

3.1. Détermination de la FRF en déplacement par une analyse « temporelle »

- Passons à l'approximation sous forme exponentielle complexe (cf Chapitre 2) :
 $f(t) \rightarrow f^*(t) = F^* e^{j\Omega t}$ et $x(t) \rightarrow x^*(t) = X^* e^{j(\Omega t + \varphi)}$, avec $F^* = -j \frac{F}{2}$ et $X^* = -j \frac{X}{2}$ ($F^*, X^* \in \mathbb{C}$)
- Reprenons l'équation différentielle avec ces notations complexes :
 $m\ddot{x}^*(t) + c\dot{x}^*(t) + kx^*(t) = f^*(t)$, alors : $[-m\Omega^2 + jc\Omega + k]X^* e^{j\Omega t} e^{j\varphi} = F^* e^{j\Omega t}$
- On en déduit l'expression de la **FRF complexe en déplacement** :

$$H^*(\Omega) = \frac{X^*}{F^*} = \frac{1}{k - m\Omega^2 + jc\Omega} e^{-j\varphi}$$

On retrouve bien la **même expression de la FRF en déplacement qu'en utilisant la transformée de Fourier**, sauf que la **déphasage** (φ) apparaît quand on traite des réponses temporelles (celui-ci n'a pas de sens dans le domaine fréquentiel)

A noter : la FRF $H^*(\Omega)$ ainsi définie est un **nombre complexe**

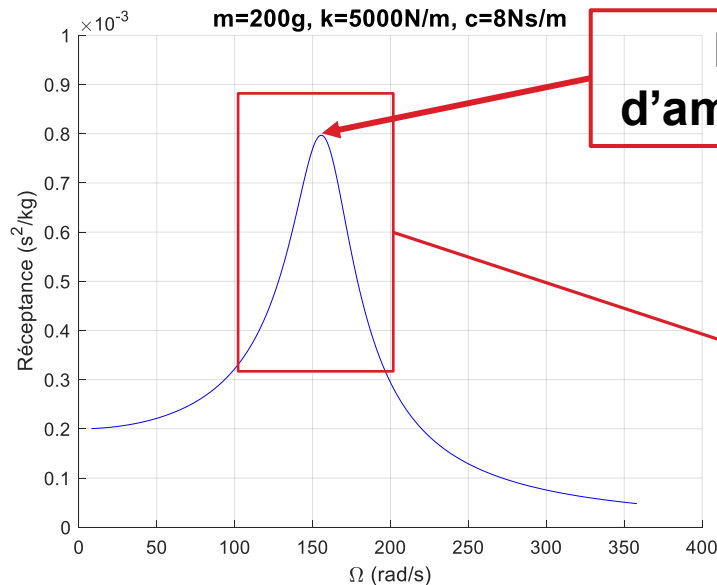
Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

3. Réponse à une excitation sinusoïdale $f(t) = F \sin(\Omega t)$

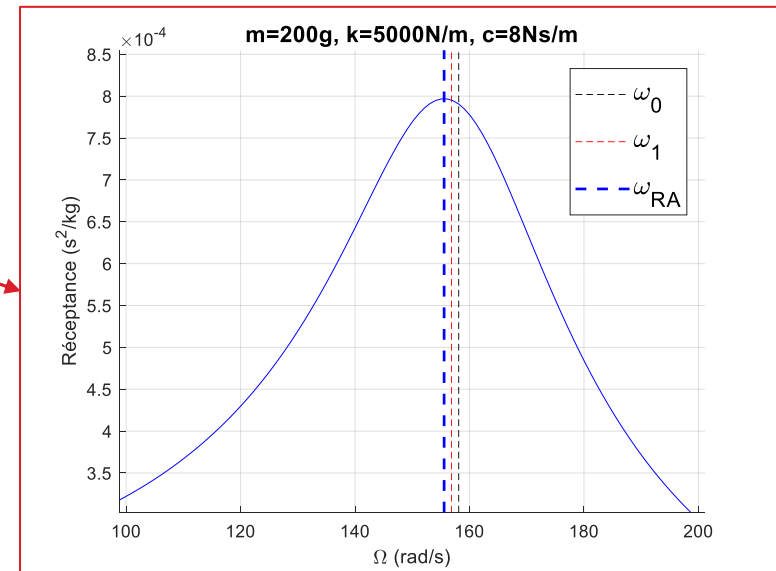
3.2. Analyse de la FRF en déplacement ou réceptance

- Evolution du module de la réceptance en fonction de Ω :

$$H(\Omega) = \frac{X}{F} = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$$



**Pic de réceptance : résonance
d'amplitude en déplacement ($\Omega = \omega_{RA}$)**



Rappel : $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$
et $\omega_{RA} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$

Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

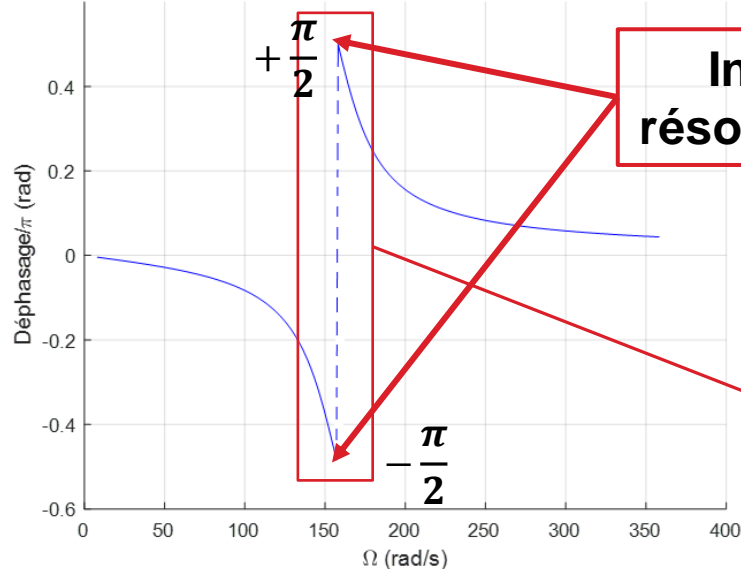
3. Réponse à une excitation sinusoïdale $f(t) = F \sin(\Omega t)$

3.2. Analyse de la FRF en déplacement ou réceptance

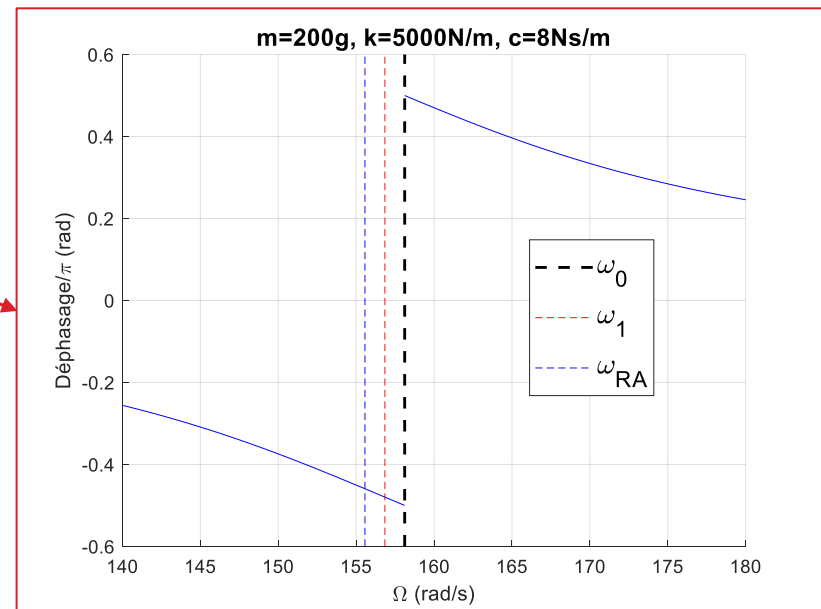
- Evolution du déphasage force-déplacement vibratoire, φ , en fonction de Ω :

$$\varphi(\Omega) = \arctan \left[\frac{-2\xi \Omega / \omega_0}{1 - \Omega^2 / \omega_0^2} \right]$$

$m=200\text{g}$, $k=5000\text{N/m}$, $c=8\text{Ns/m}$



Inversion de phase à la résonance de phase ($\Omega = \omega_0$)



Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

3. Réponse à une excitation sinusoïdale $f(t) = F \sin(\Omega t)$

3.3. FRF en vitesse : mobilité

• Rappel :

↪ On a posé $f(t) = F \sin(\Omega t) \rightarrow f^*(t) = F^* e^{j\Omega t}$, avec $F^* = -jF/2$
et $x(t) = X \sin(\Omega t + \varphi) \rightarrow x^*(t) = X^* e^{j(\Omega t + \varphi)}$, avec $X^* = -jX/2$

↪ La **réceptance**, $H^*(\Omega) = \frac{X^*}{F^*}$, est la FRF en déplacement

- On peut aussi définir la **mobilité** qui est la **FRF en vitesse**, $M^*(\Omega) = \frac{\dot{X}^*}{F^*}$
 - ↪ Si $x^*(t) = X^* e^{j(\Omega t + \varphi)}$ alors $\dot{x}^*(t) = j\Omega X^* e^{j(\Omega t + \varphi)}$ et donc $M^*(\Omega) = j\Omega \frac{X^*}{F^*} = j\Omega H^*(\Omega)$
 - ↪ Même expression par la transformée de Fourier puisque $\mathcal{F}\{\dot{x}(t)\} = j\Omega \mathcal{F}\{x(t)\}$
- Module de la mobilité : $|M^*(\Omega)| = \Omega \frac{X}{F} = \Omega |H^*(\Omega)|$
- Notons que : $\arg(\dot{x}^*(t)) = \arg(j\Omega) + \arg(x^*(t)) = \frac{\pi}{2} + \arg(x^*(t))$:
 - ↪ **Déphasage déplacement vibratoire/vitesse vibratoire** : $\frac{\pi}{2}$
 - ↪ **Déphasage vitesse vibratoire/force excitatrice** : $\frac{\pi}{2} + \varphi$

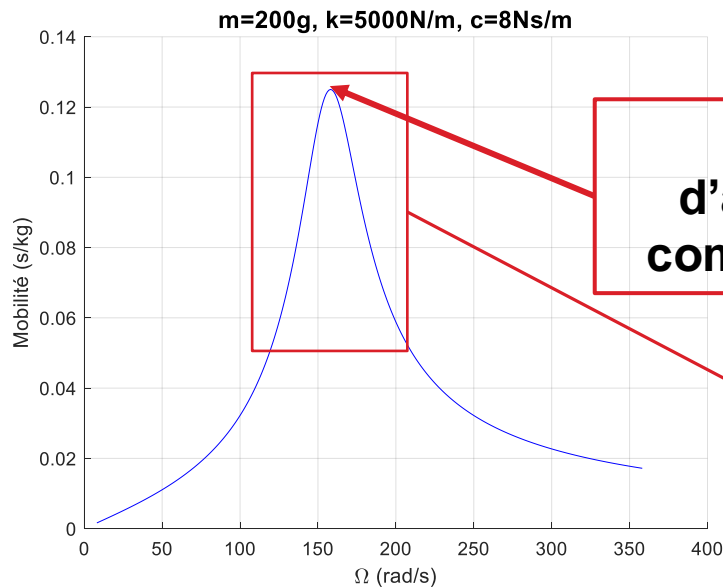
Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

3. Réponse à une excitation sinusoïdale $f(t) = F \sin(\Omega t)$

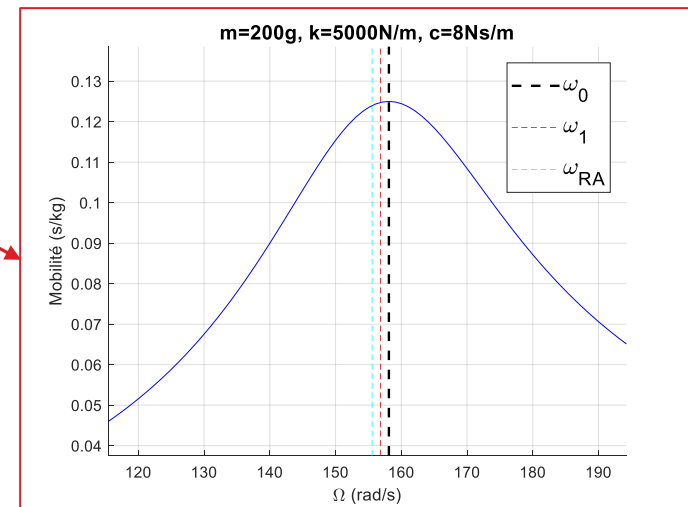
3.3. FRF en vitesse : mobilité

- Evolution du module de la mobilité en fonction de Ω :

$$M(\Omega) = |M^*(\Omega)| = \Omega |H^*(\Omega)| = \frac{1}{k} \frac{\Omega}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$$



**Pic de mobilité : résonance
d'amplitude de la vitesse ($\Omega = \omega_0$,
comme pour la résonance de phase)**



Rappel : $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$
et $\omega_{RA} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$

Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

3. Réponse à une excitation sinusoïdale $f(t) = F \sin(\Omega t)$

3.4. FRF en accélération : inertance

- On peut aussi définir l'**inertance** qui est la **FRF en accélération**, $A^*(\Omega) = \frac{\ddot{x}^*}{F^*}$
 - Si $x^*(t) = X^* e^{j(\Omega t + \varphi)}$ alors $\ddot{x}^*(t) = -\Omega^2 X^* e^{j(\Omega t + \varphi)}$ et donc $A^*(\Omega) = -\Omega^2 \frac{X^*}{F^*} = -\Omega^2 H^*(\Omega)$
 - Même expression par la transformée de Fourier puisque $\mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\} = -\Omega^2 \mathcal{F}\{x(t)\}$
- Module de l'inertance : $|A^*(\Omega)| = \Omega^2 \frac{X}{F} = \Omega^2 |H^*(\Omega)|$
- Notons que : $\arg(\ddot{x}^*(t)) = \arg(-\Omega^2) + \arg(x^*(t)) = \arg(x^*(t))$:
 - **Déplacement vibratoire et accélération vibratoire sont en phase**
 - **Déphasage accélération vibratoire/force excitatrice : φ**

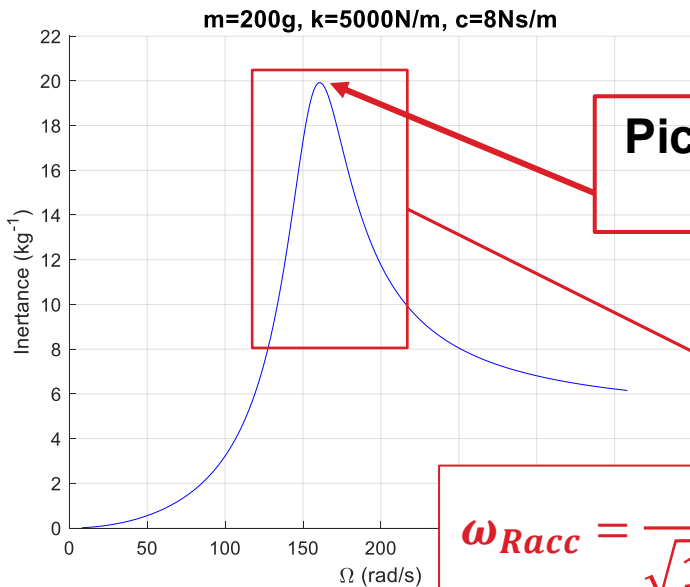
Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

3. Réponse à une excitation sinusoïdale $f(t) = F \sin(\Omega t)$

3.4. FRF en accélération : inertance

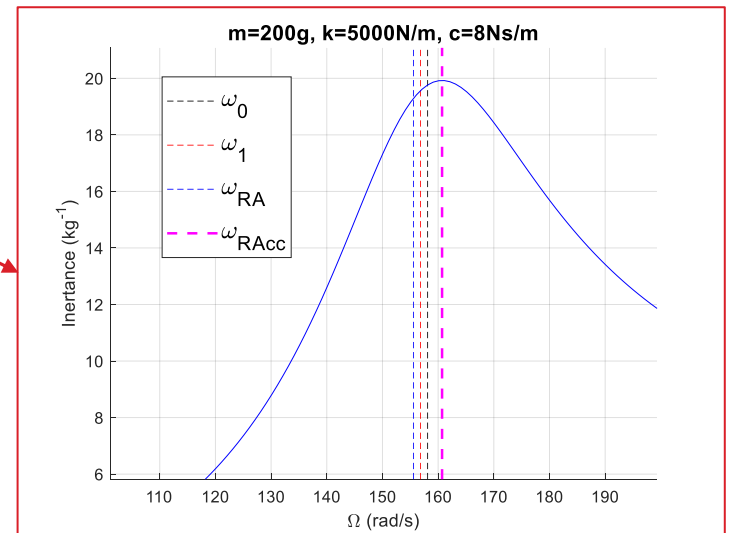
- Evolution du module de l'inertance en fonction de Ω :

$$A(\Omega) = |A^*(\Omega)| = \Omega^2 |H^*(\Omega)| = \frac{1}{k} \frac{\Omega^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$$



Pic d'inertance : résonance d'amplitude de l'accélération ($\Omega = \omega_{RAcc}$)

$$\omega_{Racc} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\xi^2}}$$



Rappel : $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$
et $\omega_{RA} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$

Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

3. Réponse à une excitation sinusoïdale $f(t) = F \sin(\Omega t)$

3.5. Récapitulatif des pulsations remarquables

Nature de la FRF	Résonance d'amplitude	
	Pulsation maximisant le module de la FRF	Valeur maximale du module de la FRF
Réceptance : FRF en déplacement	$\omega_{RA} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$	$H_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$
Mobilité : FRF en vitesse	ω_0	$M_{max} = \frac{\omega_0}{2k\xi} = \frac{1}{c}$
Inertance : FRF en accélération	$\omega_{Racc} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\xi^2}}$	$A_{max} = \frac{\omega_0^2}{2k\xi\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{1}{2m\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$

- On peut ajouter la résonance de phase en ω_0 : $\tan(\varphi) \rightarrow \infty$, i.e. $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

3. Réponse à une excitation sinusoïdale $f(t) = F \sin(\Omega t)$

3.5. Récapitulatif des pulsations remarquables

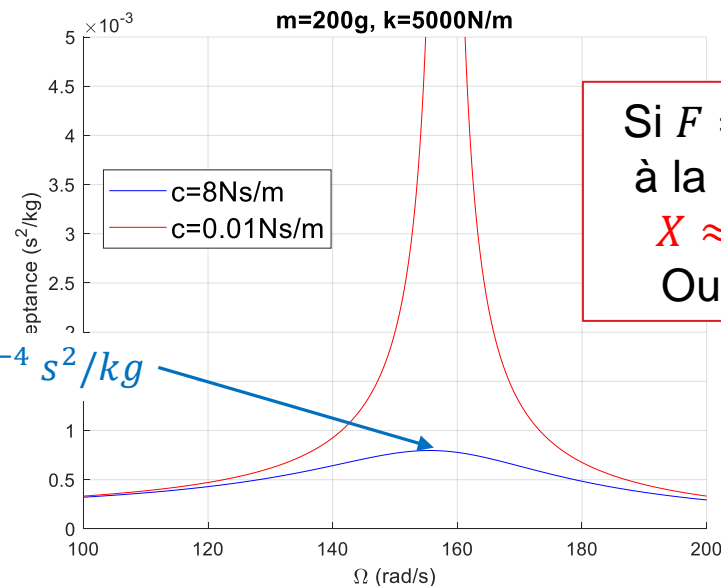
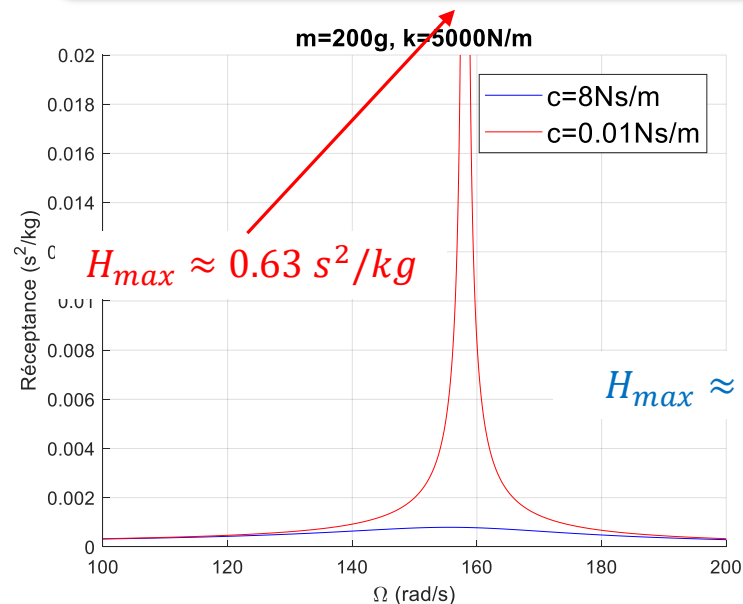
- Remarque : oscillateur conservatif ou **très faiblement amorti** :

↳ $c \rightarrow 0$ et donc $\xi \rightarrow 0$

↳ $\omega_{RA} \approx \omega_{RAcc} \approx \omega_0$: les résonances d'amplitude de déplacement et d'accélération ont lieu pour une pulsation très proche de la pulsation propre (et donc à peu près à la même pulsation que la résonance d'amplitude de vitesse et la résonance de phase)

↳ Tous les **modules des FRF tendent vers l'infini**

Plus l'amortissement est faible, plus l'excitation à la résonance amplifie les oscillations !



Si $F = 1kN$, alors
à la résonance :
 $X \approx 630 m$ (!!)
Ou $X \approx 0.8 m$

Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

4. Tracé des FRF : diagramme de Bode

4.1. Notion de gain en dB

- Pour tracer l'évolution des modules des FRF, on utilise souvent une **échelle logarithmique** et on parle alors de **gain en amplitude**
- Le gain en amplitude de la réceptance (par exemple) est défini par $20\log_{10}(|H^*(\Omega)|)$ et s'exprime en **dB (décibels)**

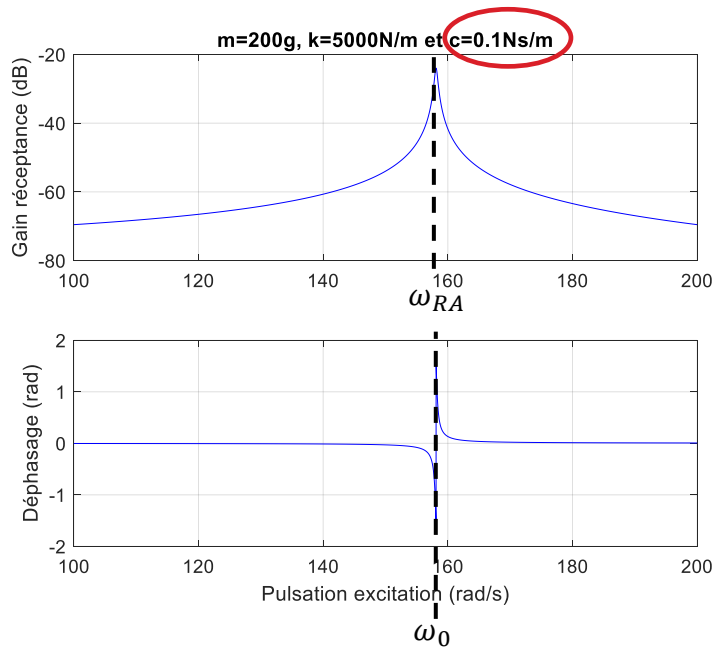
4.2. Principe du diagramme de Bode

- Le diagramme de Bode permet de visualiser simultanément les évolutions **en fonction de la pulsation (ou de la fréquence) de l'excitation** :
 - Du **module d'une FRF** (généralement sous forme de **gain** en amplitude)
 - Du **déphasage** force/déplacement (ou accélération), φ

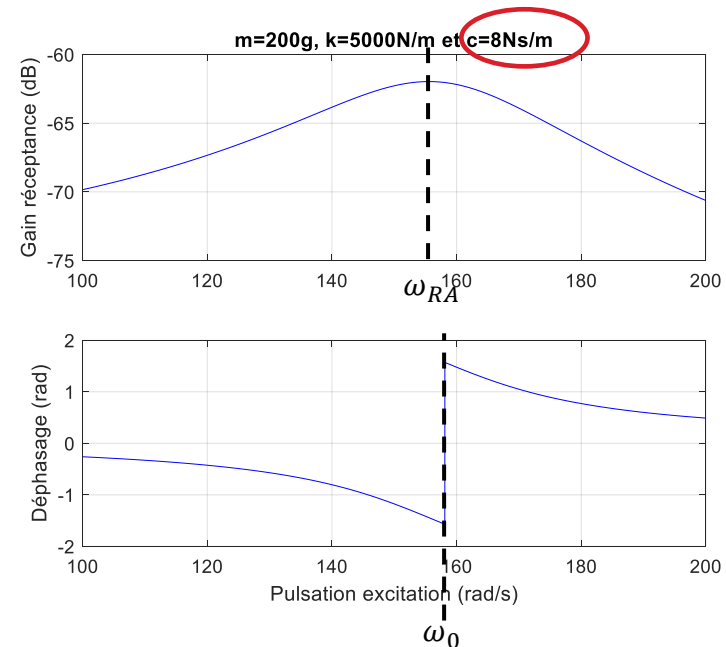
Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

4. Tracé des FRF : diagramme de Bode

4.2. Principe du diagramme de Bode



$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = 158.1139 \text{ rad/s}, \xi = \frac{c}{2m\omega_0} = 0.0016$$
$$\omega_{RA} = 158.1135 \text{ rad/s} \approx \omega_0$$



$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = 158.1139 \text{ rad/s}, \xi = \frac{c}{2m\omega_0} = 0.1265$$
$$\omega_{RA} = 155.5635 \text{ rad/s} \neq \omega_0$$

- **Pic d'amplitude en $\omega_{RA} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ (faiblement marqué si amortissement élevé)**
- **Inversion de phase en ω_0**
- Pour des systèmes à n ddl : on observe un pic et une inversion de phase pour chaque résonance

Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

4. Tracé des FRF : diagramme de Bode

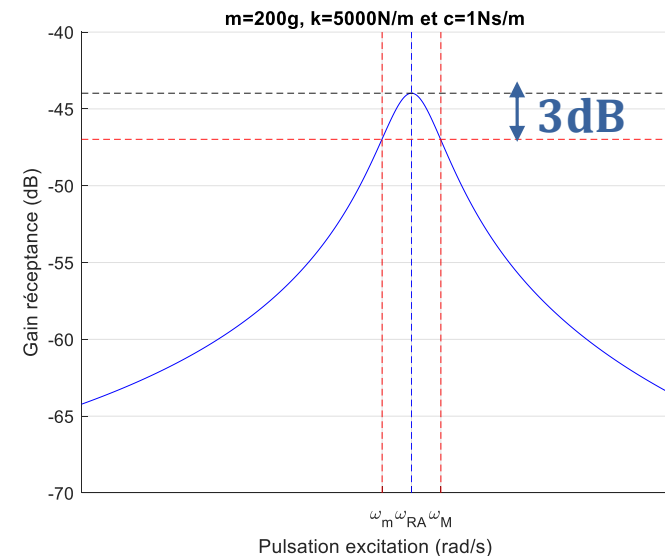
4.3. Largeur de bande à -3dB

- On peut vouloir trouver la gamme de pulsation/fréquence d'excitation à éviter pour éviter la mise en résonance
- Communément, on peut alors chercher les pulsations/fréquences pour lesquelles la puissance de la réponse vibratoire reste inférieure à la moitié de la puissance maximale ce qui correspond à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$

- Considérons le module de la réceptance, $H(\Omega)$, et le gain associé :

$$\begin{aligned} 20\log\left(\frac{H_{max}}{\sqrt{2}}\right) &= 20\log(H_{max}) - 20\log(\sqrt{2}) \\ &= 20\log(H_{max}) - 3\text{dB} \end{aligned}$$

- On cherche ensuite les pulsations ω_m et ω_M qui délimitent la « gamme à éviter »



Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

4. Tracé des FRF : diagramme de Bode

4.3. Largeur de bande à -3dB

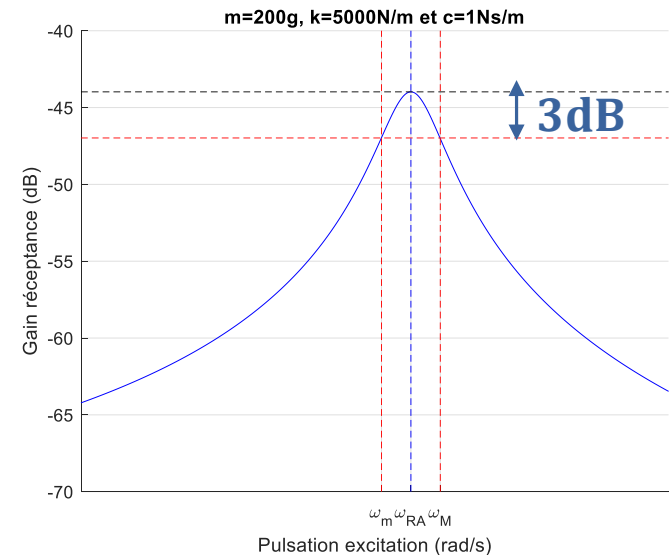
- Je vous passe la démonstration ☺ : si on prend $\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi}$ et $\omega_M = \omega_0 \sqrt{1 + 2\xi}$, on peut vérifier que $H(\omega_m) = H(\omega_M) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$, avec $H_{max} = \frac{1}{2k\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ en ω_{RA} , et donc :

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi} \text{ et } \omega_M = \omega_0 \sqrt{1 + 2\xi}$$

- La largeur de bande à -3dB est $\Delta\omega = |\omega_M - \omega_m|$
- Si l'amortissement est faible, $\xi \ll 1$, alors par développement limité en $\xi \rightarrow 0$ de $\Delta\omega = \omega_0 (\sqrt{1 + 2\xi} - \sqrt{1 - 2\xi})$, on a $\Delta\omega \approx \omega_0 2\xi$ et :

$$\xi \approx \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}$$

Si l'amortissement est faible, la mesure de la largeur de bande à -3dB permet d'identifier le taux d'amortissement !



Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

5. Tracé des FRF : diagramme de Nyquist

- Le diagramme de Nyquist est une **représentation polaire d'une FRF paramétrée en pulsation de l'excitation, Ω**
- Le tracé se fait **dans le plan complexe** en considérant les parties imaginaire et réelle des FRF
- Ainsi, on considère deux coordonnées polaires :
 - Le rayon est le module de la FRF**, par exemple $H(\Omega)$ pour la réceptance
 - L'angle polaire est l'argument de la FRF** (déphasage φ pour la réceptance)
- Traçons le diagramme de Nyquist pour la réceptance de notre oscillateur à 1 ddl, réduite à son expression obtenue dans le domaine fréquentiel (i.e. par la transformée de Fourier de l'équation différentielle) :

$$\hookrightarrow H(\Omega) = \frac{1}{k - m\Omega^2 + jc\Omega} = \frac{k - m\Omega^2 - jc\Omega}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}$$

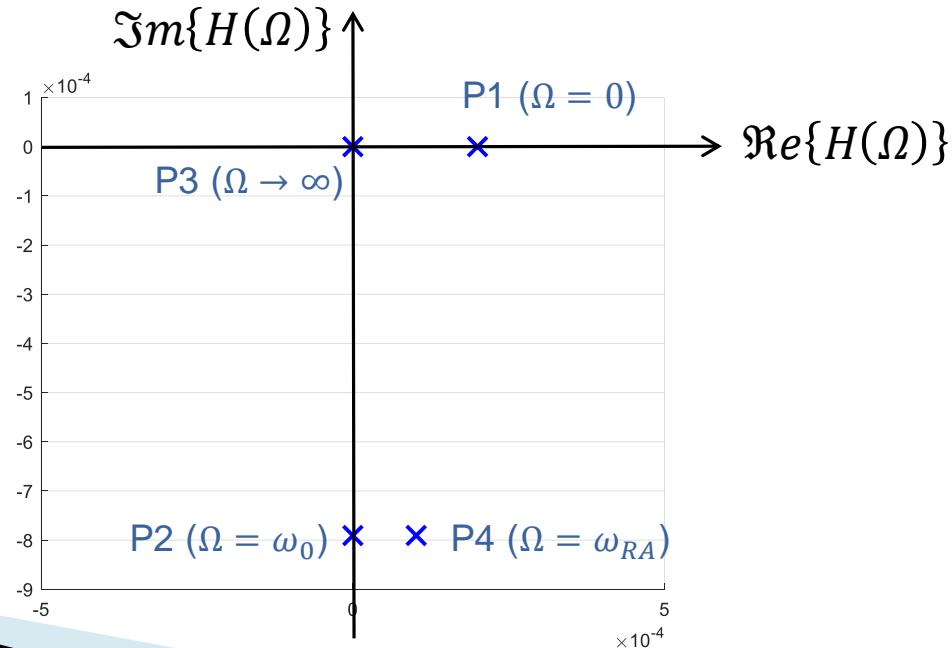
$$\hookrightarrow \Re\{H(\Omega)\} = \frac{k - m\Omega^2}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2} = \frac{\frac{1}{k}\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\text{et } \Im\{H(\Omega)\} = \frac{-c\Omega}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2} = \frac{-\frac{1}{k}2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

5. Tracé des FRF : diagramme de Nyquist

- Tracé « point par point » du diagramme de Nyquist
 - En $\Omega = 0$, $\Re\{H(0)\} = 1/k$ et $\Im\{H(0)\} = 0$ (point 1)
 - En $\Omega = \omega_0$, $\Re\{H(\omega_0)\} = 0$ et $\Im\{H(\omega_0)\} = \frac{-1}{c\omega_0}$ (point 2)
 - Pour $\Omega \rightarrow \infty$, $\Re\{H(\Omega \rightarrow \infty)\} \rightarrow 0^-$ et $\Im\{H(\Omega \rightarrow \infty)\} \rightarrow 0^-$ (point 3)
 - En $\Omega = \omega_{RA}$, $\Re\{H(\omega_{RA})\} = \frac{1}{2k(1-\xi^2)}$ et $\Im\{H(\omega_{RA})\} = \frac{-\sqrt{1-2\xi^2}}{2k\xi(1-\xi^2)}$ (point 4)



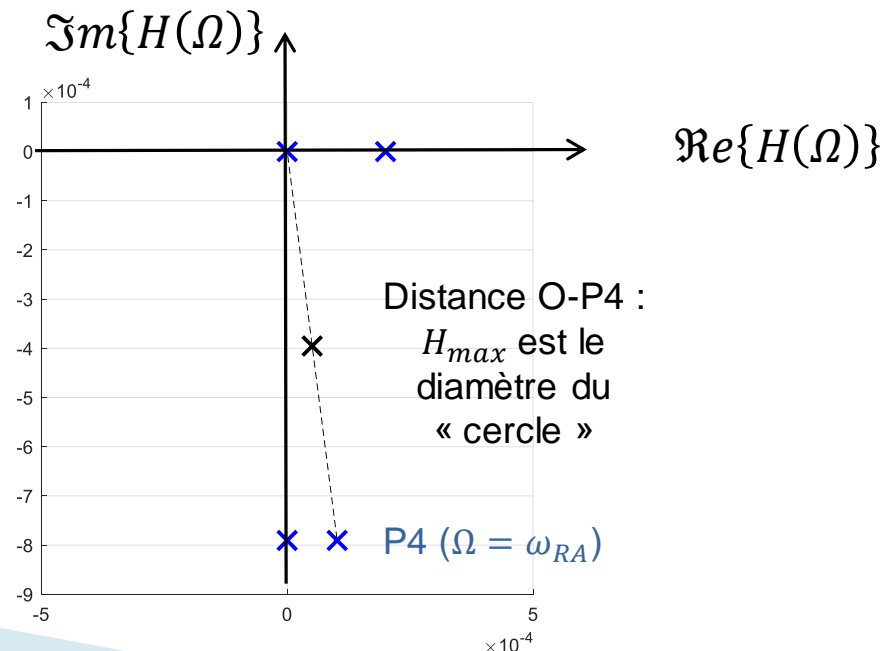
Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

5. Tracé des FRF : diagramme de Nyquist

- En $\Omega = \omega_{RA}$, le module de $H(\Omega)$ est maximal
 - ↳ La distance entre l'origine O et un point de l'espace $(\Re\{H(\Omega)\}; \Im\{H(\Omega)\})$ est donnée par le module de $H(\Omega)$
 - ↳ La distance maximale entre tous les points du cercle et l'origine O est donc $|H(\omega_{RA})|$, autrement dit :
 - ➔ Le segment $[OP4]$ est un diamètre du « cercle* » de Nyquist
 - ➔ Le centre du « cercle » est au milieu de ce segment

*: Assimilable à un cercle au voisinage de ω_0

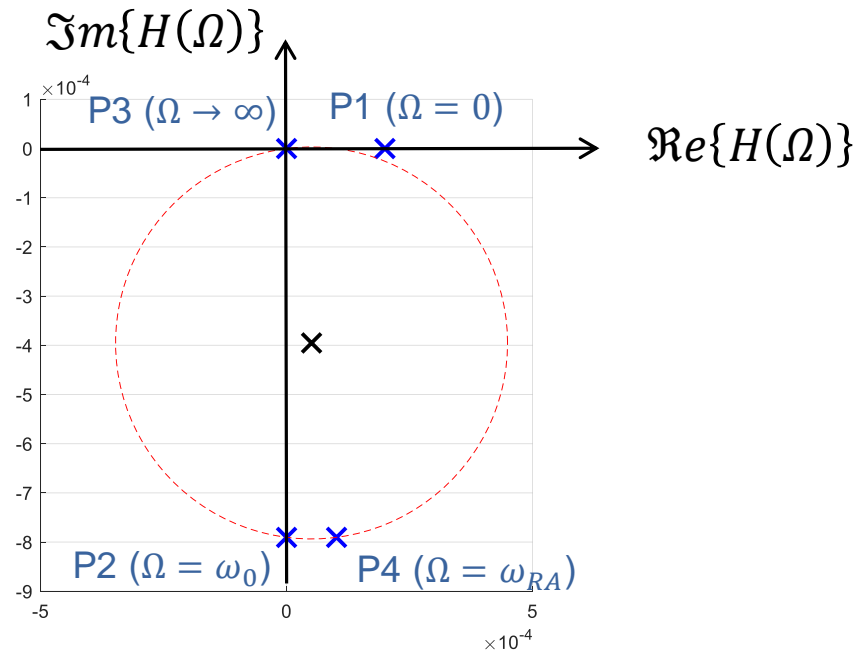
Remarque : les coordonnées du « centre » sont aussi $\left(\frac{\Re\{H(0)\}}{2}; \frac{\Im\{H(\omega_0)\}}{2}\right)$, soit $\left(\frac{1}{2k}; \frac{-1}{2c\omega_0}\right)$



Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

5. Tracé des FRF : diagramme de Nyquist

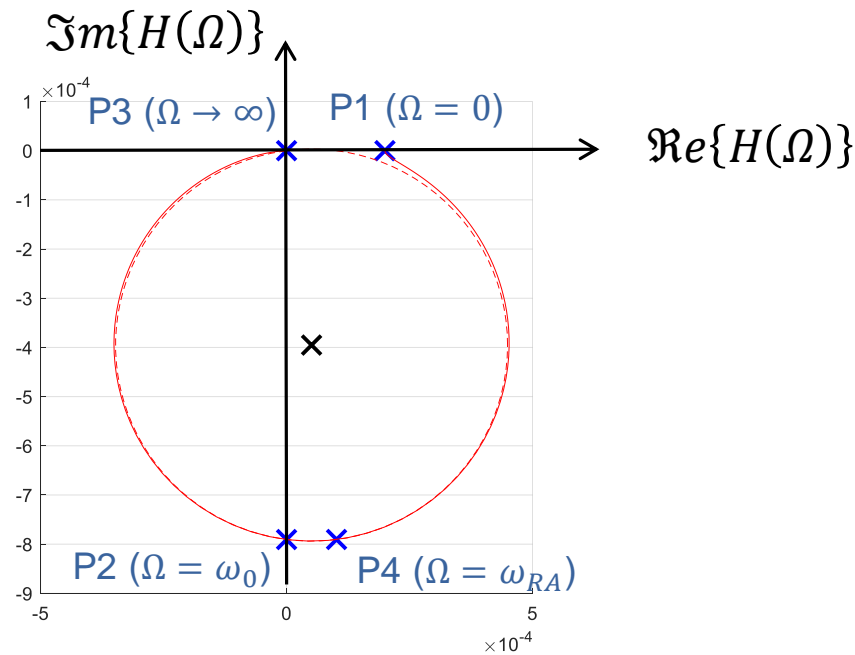
- Le diagramme de Nyquist est **assimilable à un cercle au voisinage de ω_0**



Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

5. Tracé des FRF : diagramme de Nyquist

- Le diagramme de Nyquist « réel » est obtenu en calculant $\Re\{H(\Omega)\}$ et $\Im\{H(\Omega)\} \forall \Omega$



Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

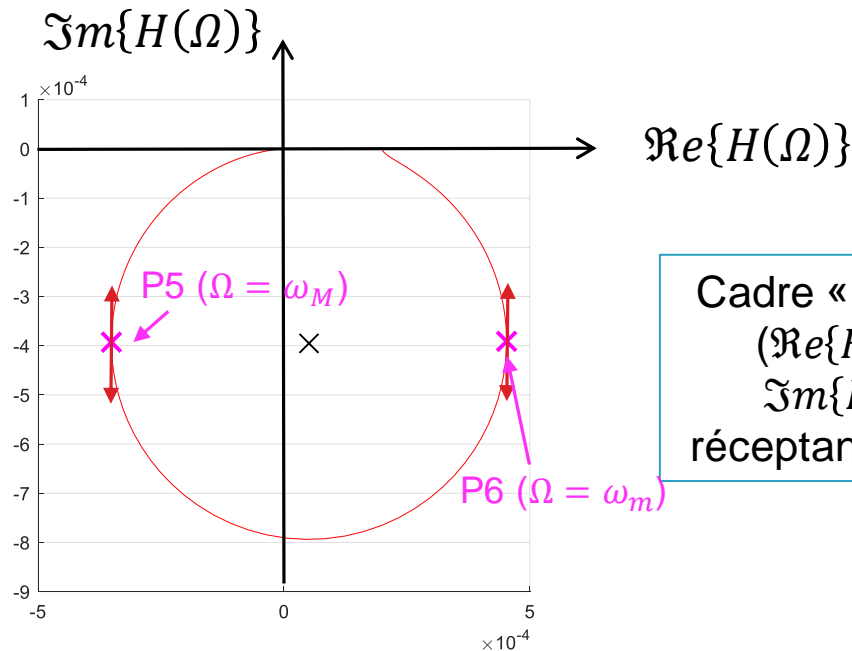
5. Tracé des FRF : diagramme de Nyquist

- Les pulsations ω_M et ω_m qui délimitent la bande à -3dB sont des extrema pour $\Re\{H(\Omega)\}$ (i.e. $\frac{\partial \Re\{H(\omega_0\sqrt{1\pm 2\xi})\}}{\partial \Omega} = 0$)

→ Le diagramme de Nyquist admet deux tangentes verticales pour $\omega_0\sqrt{1\pm 2\xi}$

Cadre « supérieur »
($\Im\{H(\Omega)\} > 0$) : pas de
réalité physique

Cadre « inférieur
gauche » ($\Re\{H(\Omega)\} \leq 0$
et $\Im\{H(\Omega)\} \leq 0$) :
réceptance pour $\Omega \geq \omega_0$



Cadre « inférieur droit »
($\Re\{H(\Omega)\} \geq 0$ et
 $\Im\{H(\Omega)\} \leq 0$) :
réceptance pour $\Omega \leq \omega_0$

Chapitre 3 – Analyse modale d'un système à 1 ddl

5. Tracé des FRF : diagramme de Nyquist

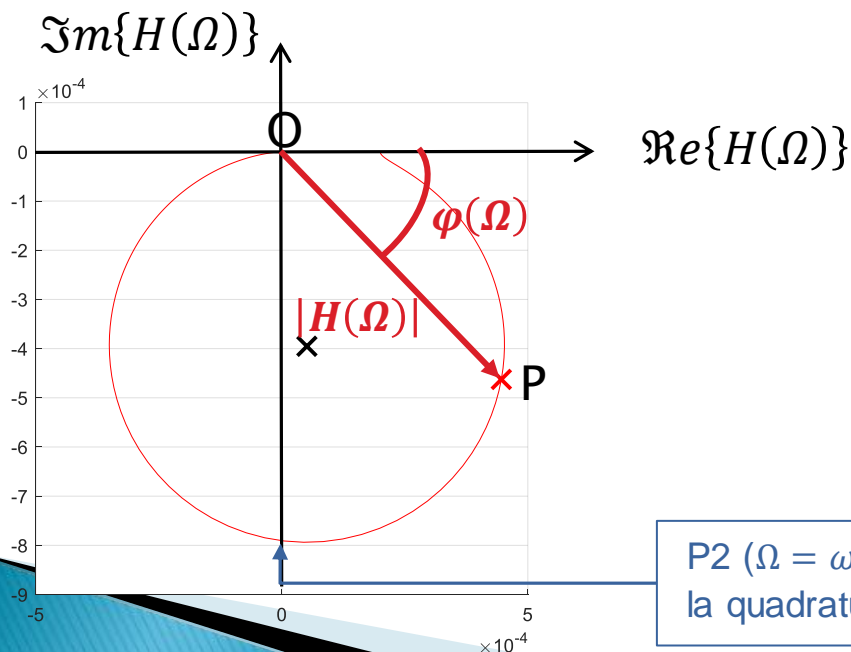
• Comment « lire » le diagramme de Nyquist ?

↳ Chaque point du diagramme correspond à une réceptance pour une excitation Ω

↳ Prenons un point P sur le cercle :

→ La distance entre l'origine et P est $|H(\Omega)|$

→ L'angle entre l'axe horizontal et \overrightarrow{OP} est le déphasage φ

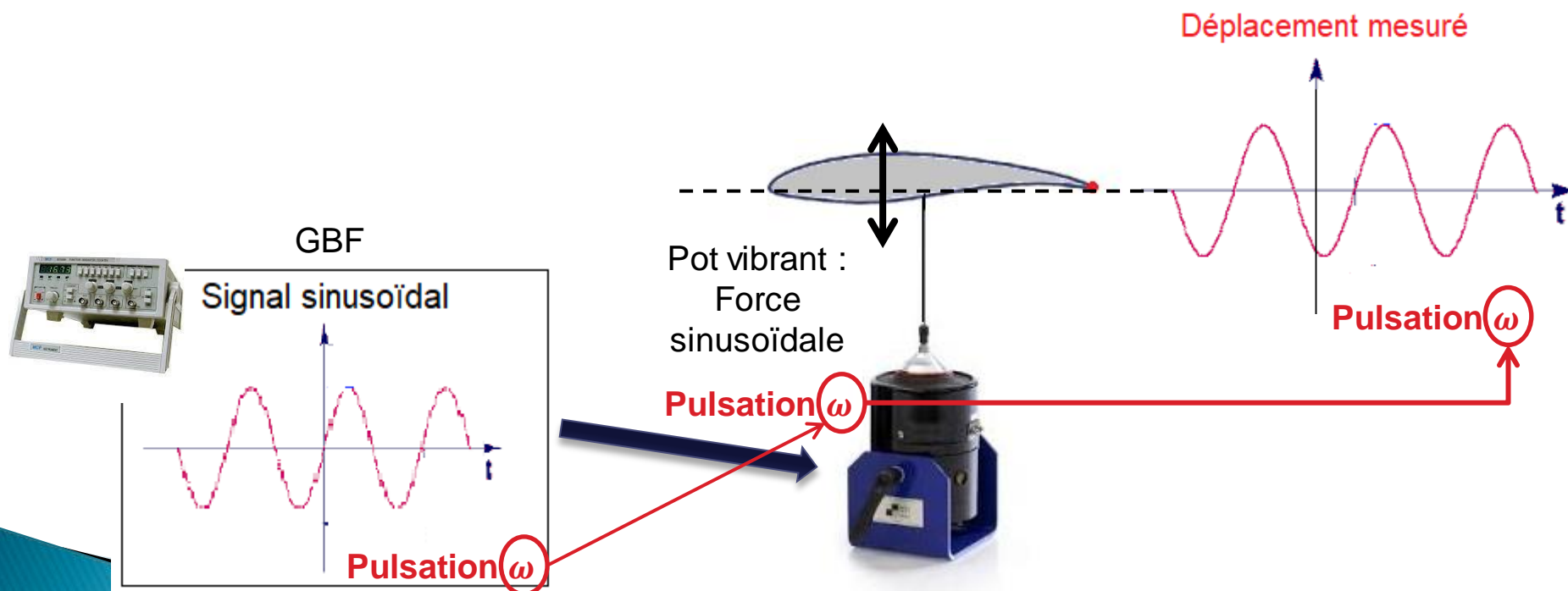


Exemple d'application : mesure de la réponse vibratoire à différentes pulsations de l'excitation
=> construction d'un diagramme de Nyquist « discrétisé »
=> détermination de ω_0 , ω_{RA} ... et de l'amortissement

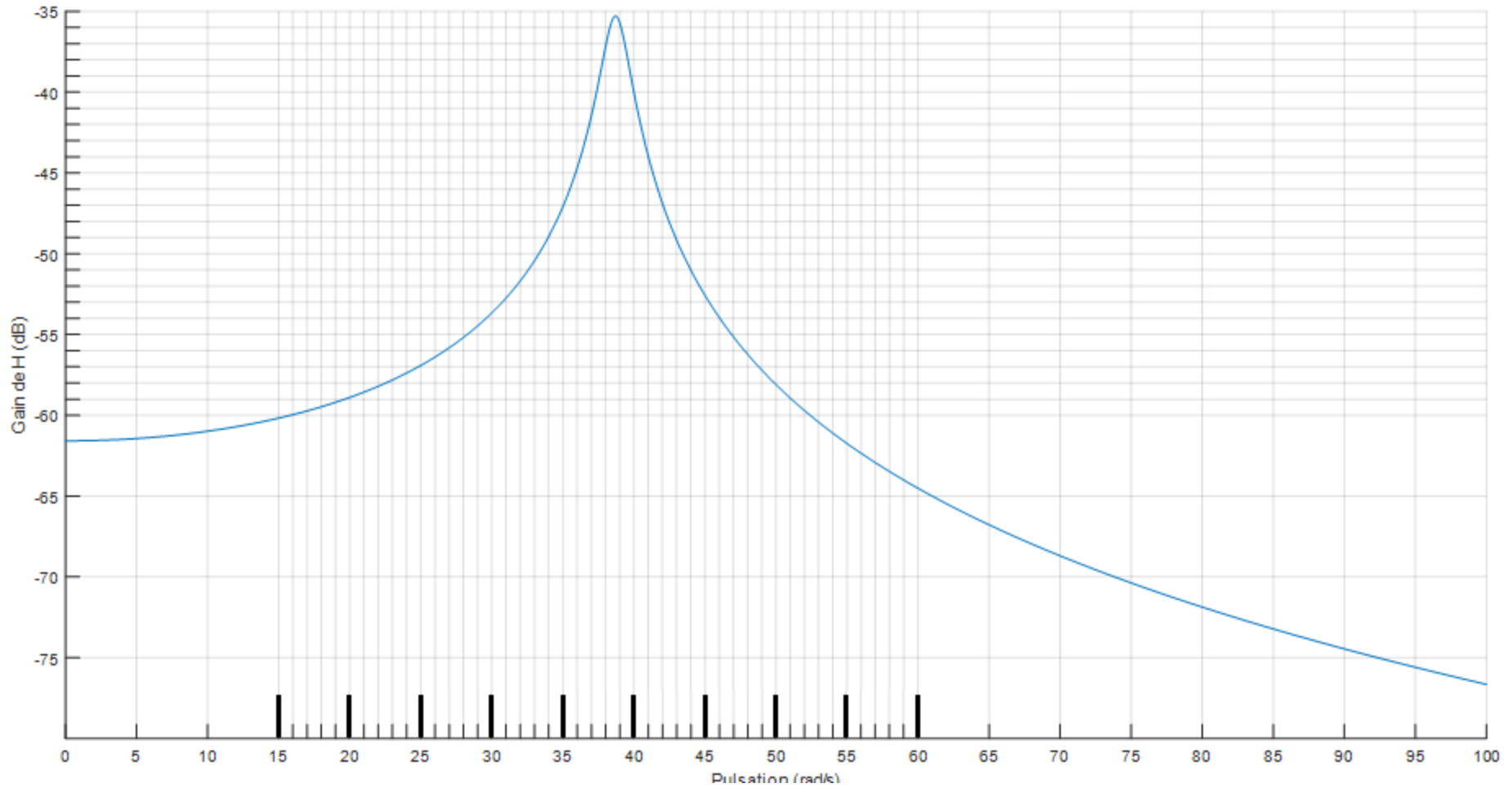
P2 ($\Omega = \omega_0$) : on retrouve bien la quadrature de phase, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Petit exercice

- Soit une structure de masse $m=800\text{g}$
- Son comportement vibratoire à 1 ddl peut être modélisé par un système masse (m), ressort (raideur k) et amortisseur (viscosité c)
- On impose à la structure une excitation sinusoïdale de pulsation variable et on mesure le déplacement vibratoire, ce qui permet de tracer l'évolution du gain en amplitude de la réceptance (diapo suivante)
 - Donnez une valeur approchée du taux d'amortissement du système



Petit exercice (suite)



Correction

- ✓ Largeur de bande à -3dB : $\Delta\omega = 2,4 \text{ rad/s}$
- ✓ En faisant l'hypothèse d'un amortissement faible, le taux d'amortissement est donné par : $\xi \approx \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}$
- ✓ Avec cette même hypothèse, ω_0 est proche de la pulsation au pic d'amplitude de la réceptance
- ✓ Alors $\omega_0 \approx 38.8 \text{ rad/s}$ et $\xi \approx 3.1\%$
- ✓ On vérifie que le taux d'amortissement est bien faible

