INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES HAUTS-DE-FRANCE

Bruits et Vibrations

Chapitre 2

Systèmes à 1 degré de liberté en oscillations forcées

Rappel : systèmes à 1 ddl en oscillations libres

- Petit rappel : on utilise un **modèle d'oscillateur : masse** (m), **ressort** (raideur k), **amortisseur** (viscosité c) qui rend compte du comportement vibratoire de la structure

  ➡ **m, k, c connus : réponse vibratoire connue !**

- En **oscillations libres** :
  - Les oscillations de la masse m autour de sa position à l'équilibre statique sont provoquées par une excitation extérieure **ponctuelle dans le temps**, les oscillations ne sont pas entretenues ensuite
  - L'expression du **déplacement vibratoire ne dépend que des paramètres m, k et c de l'oscillateur** (et des grandeurs qui en découlent), ainsi que des conditions initiales
  - Pour un oscillateur **amorti** (dissipatif), l'**amplitude des oscillations décroît au cours du temps jusqu'à devenir nulle** ; la courbe enveloppe donnant l'évolution de l'amplitude dépend uniquement des paramètres de l'oscillateur et des conditions initiales

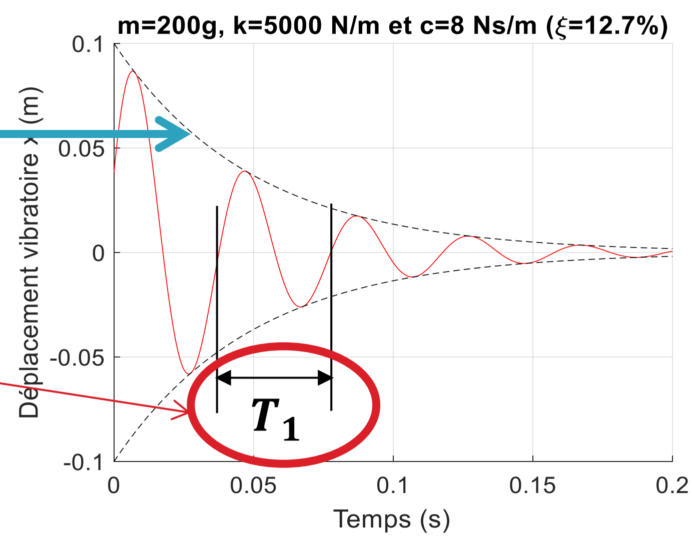
Rappel : systèmes à 1 ddl en oscillations libres

- **Oscillations libres** :
  - **Quelles que soient les valeurs de m, k et c : toujours la même expression pour le déplacement vibratoire x(t)**
    (avec $c < 2\sqrt{km}$ – **amortissement sous-critique**)

$$x(t) = Xe^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_1 t + \varphi)\ (X, \varphi \in \mathbb{R})$$

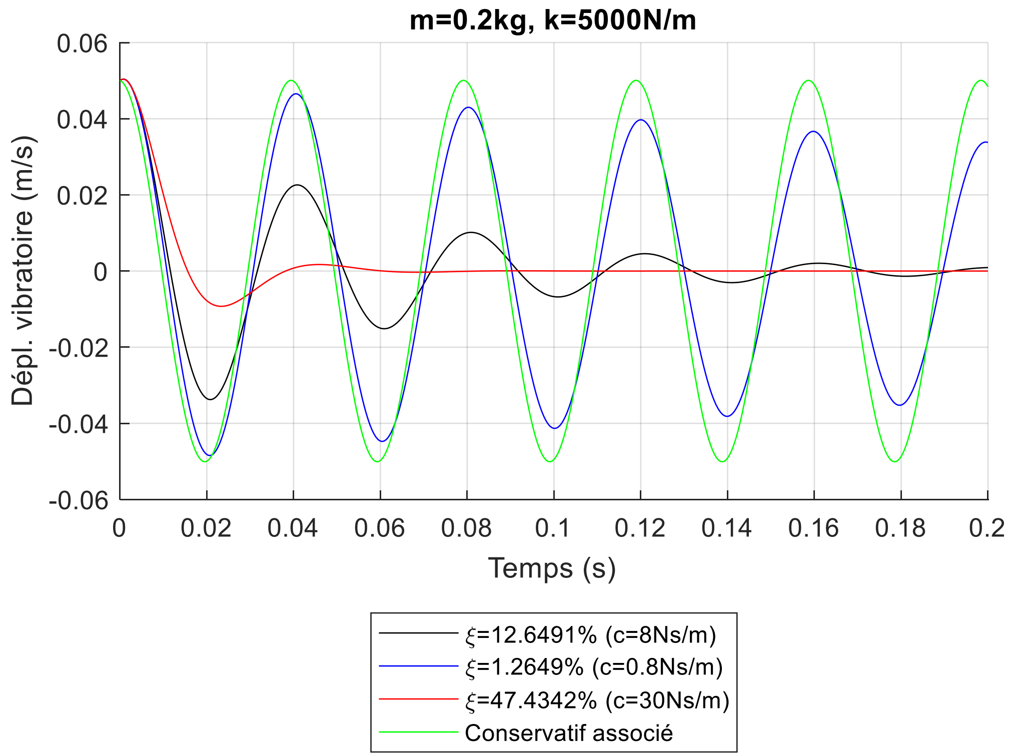
Courbe enveloppe :
pilote la décroissance de l'amplitude

Pseudo-période $\boldsymbol{T_1}$
Pulsation naturelle
$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$



Rappel : systèmes à 1 ddl en oscillations libres

- Une même expression, **différentes allures en fonction du taux d'amortissement**
- m = 200g, k=5000 N/m; x0=50 mm, v0 = 1m/s



Systèmes à 1 degré de liberté en oscillations <u>forcées</u>

Chapitre 2 – Systèmes à 1 ddl en oscillations forcées

- En **oscillations forcées** :
  - Les oscillations sont **provoquées et <u>entretenues</u> par une source excitatrice extérieure**

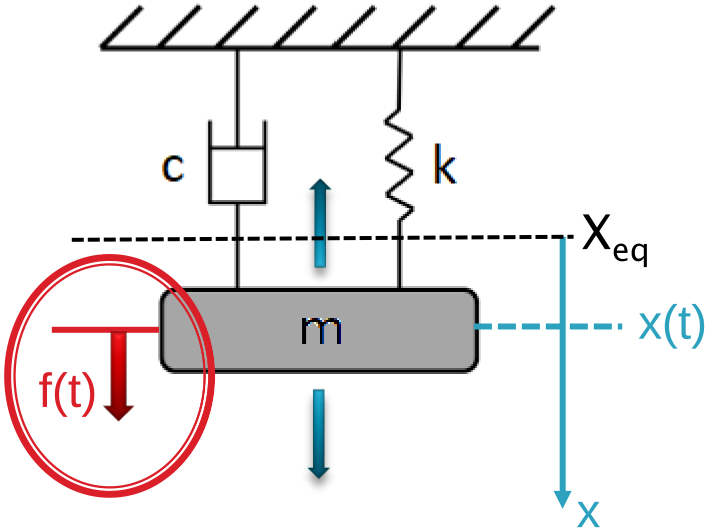
https://www.youtube.com/watch?v=NbrgbQlgi18

  - Le déplacement vibratoire dépend des caractéristiques de l'oscillateur **et de celles de la force excitatrice**
  - **Même pour un système amorti, les oscillations perdurent jusqu'à arrêt de l'excitation extérieure** ; on distinguera dans ce cas un **régime transitoire** et un **régime permanent**

⚠ **Parfois, danger !** Quand un **mode propre de la structure est excité**, l'amplitude des vibrations peut être fortement amplifiée avec des conséquences plus ou moins grave allant d'un simple bruit gênant à une mise en **résonance** pouvant entrainer la ruine de la structure

Chapitre 2 – Systèmes à 1 ddl en oscillations forcées

- Modélisation d'un oscillateur à 1 ddl en **oscillations forcées** : on ajoute simplement la **force excitatrice** dans le modèle et dans l'équation différentielle :



$$\boxed{m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)}$$

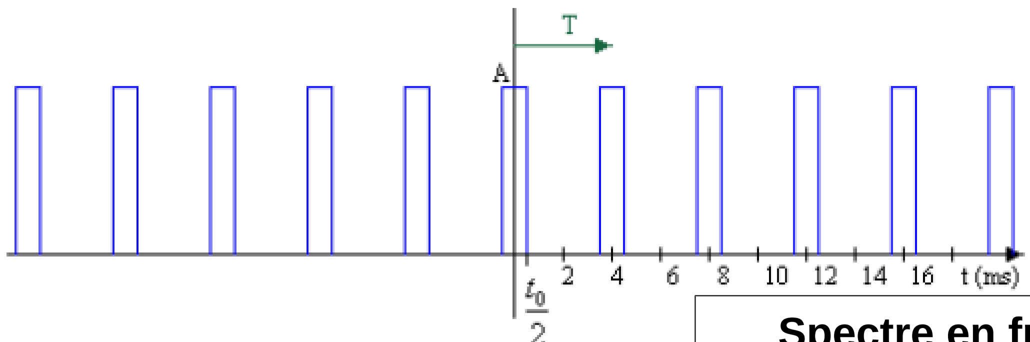
- On devra maintenant résoudre des équations différentielles du second ordre à <u>second membre non nul</u> (*voir tuto*)

1. Nature de l'excitation et spectre en fréquence

- On distingue deux catégories de force excitatrice : périodiques et non-périodiques

- Excitations **périodiques** : **somme d'excitations sinusoïdales simples** par décomposition en série de Fourier
  - ➡ **Spectre en fréquence caractérisé par des raies**

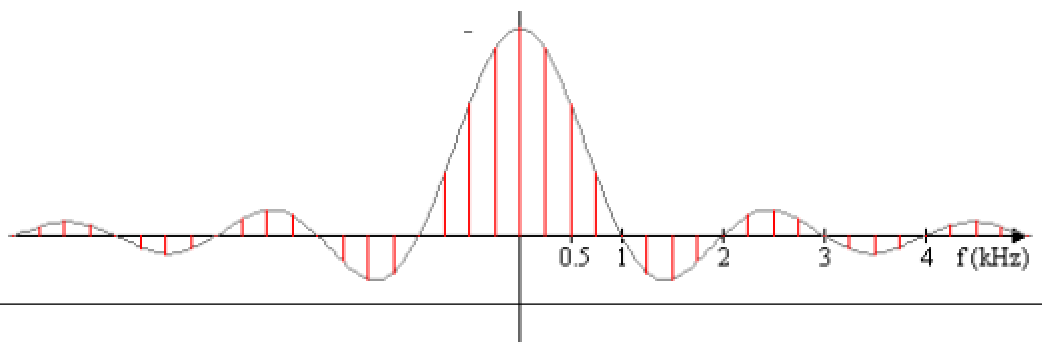
Evolution temporelle de la force excitatrice, $g(t)$



$$g(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin(n \times 2\pi F t + \varphi_n)$$

(A_i et φ_i des constantes réelles, $\forall i$)

Spectre en fréquence de la force excitatrice : amplitude A_i pour une fréquence $i \times 2\pi F$



Chapitre 2 – Systèmes à 1 ddl en oscillations forcées

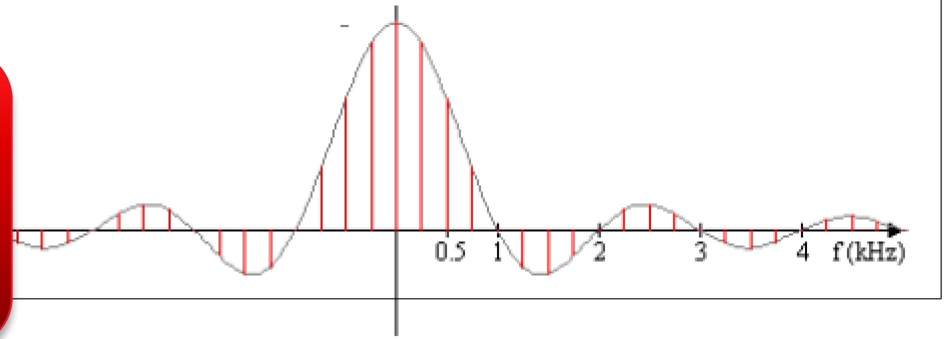
- Excitations **périodiques** : **somme d'excitations sinusoïdales simples** par décomposition en série de Fourier
  - **Spectre en fréquence caractérisé par des raies**

$\boldsymbol{g(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin(n \times 2\pi f t + \varphi_n)}$ ($\boldsymbol{A_i}$ et $\boldsymbol{\varphi_i}$ des constantes réelles, $\forall i$)

Conséquence ?
La réponse vibratoire de la structure subissant g(t) sera la même que si elle subissait **simultanément une excitation constante (A_0) plus des excitations sinusoïdales simples $A_i sin(i \times 2\pi F t + \varphi_i)$**

F est la fréquence fondamentale (ou harmonique de rang 1), $\boldsymbol{i \times 2\pi F}$ des harmoniques de rang supérieur

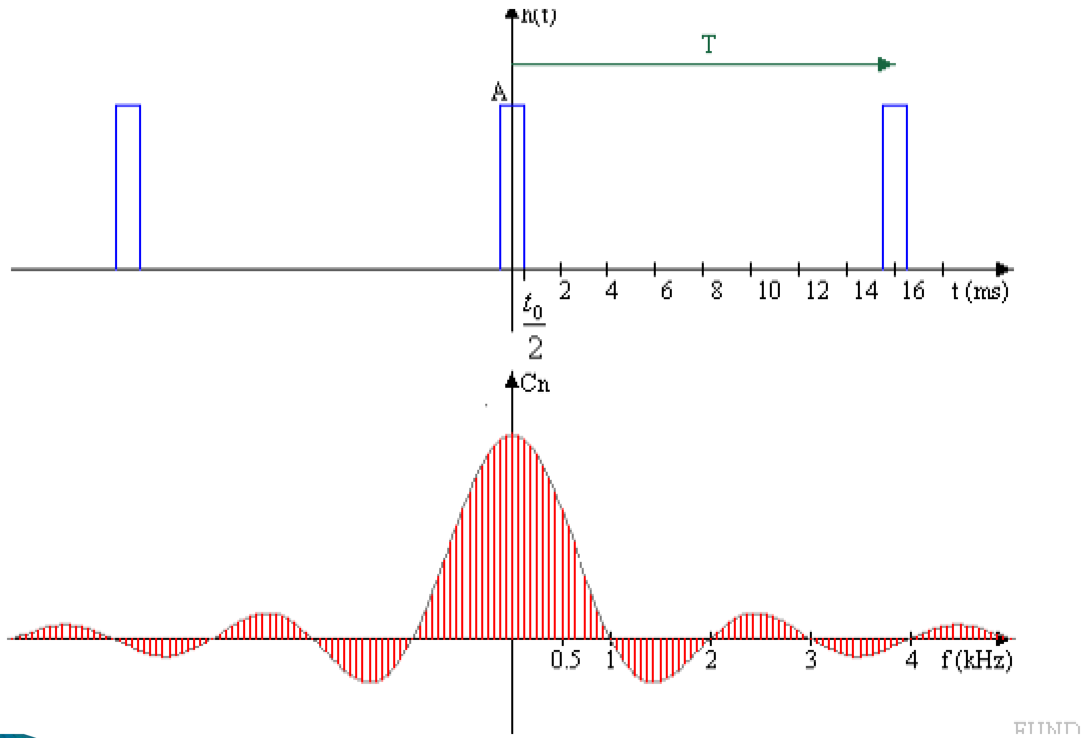
Spectre en fréquence de la force excitatrice : amplitude A_i pour une fréquence $i \times 2\pi F$



Si on sait résoudre le problème pour une excitation sinusoïdale simple, on sait le faire pour toutes les excitations périodiques !

Chapitre 2 – Systèmes à 1 ddl en oscillations forcées

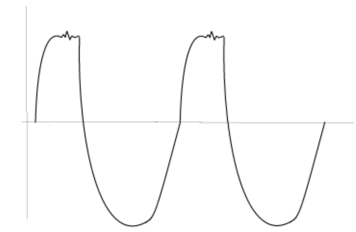
- Excitations **non-périodiques** : étude dans le **domaine fréquentiel** par transformée de Fourier (chapitre 3)
  - Excitations à « période infinie » => **spectre en fréquence continu**



Plus la période augmente, plus le spectre devient dense jusqu'à devenir continu

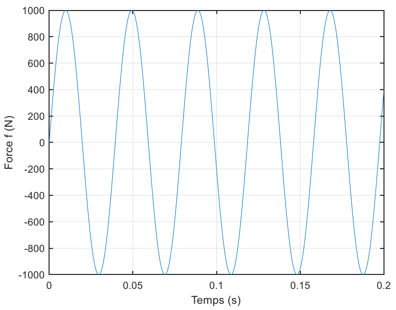
Cas particulier du Dirac : spectre = ligne horizontale => Essais au marteau d'impact

Concentrons nous sur les excitations périodiques



- Excitations périodiques complexes : machine tournante déséquilibrée, remous de l'hélice d'un navire…
  - Toutes décomposables en **somme d'excitations sinusoïdales simples** :

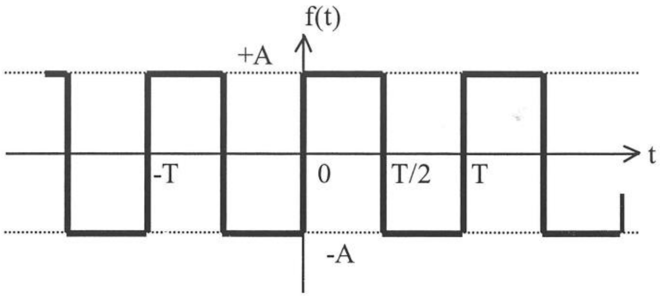
$$f(t) = Fsin(\Omega t)$$



F est **l'amplitude** de la force excitatrice, Ω sa **pulsation** = 2π x **fréquence** (pulsation en rad/s, fréquence en Hz)

Exemples

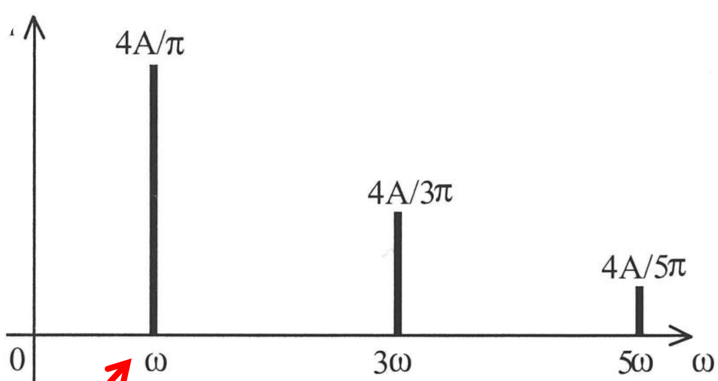
- Signal carré



$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \cdots\right]$$

Avec $\omega = {}^{2\pi}/_{T}$

Spectre en fréquence/en pulsation (fréquence = pulsation/2π) :

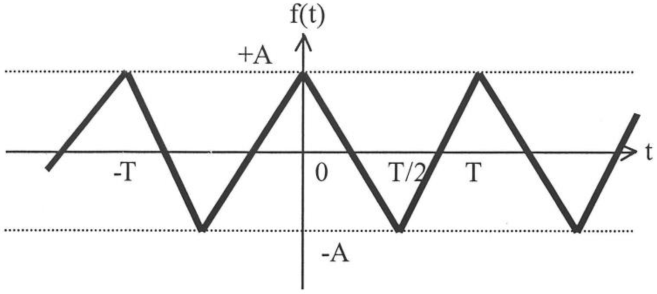


Harmonique de rang 1 : **fondamental**

Harmoniques de rang supérieur

Exemples

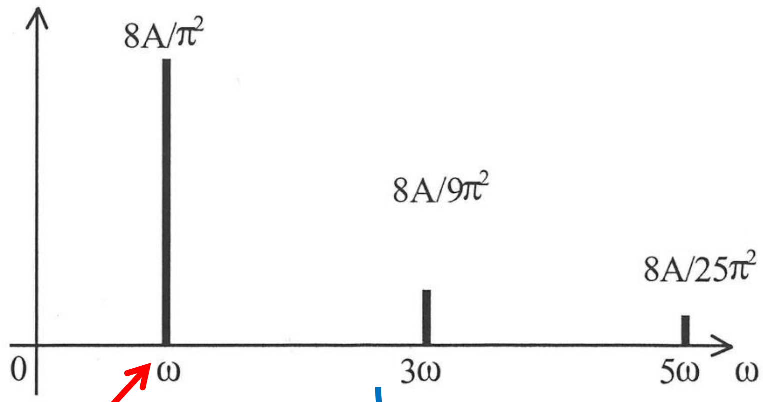
- Signal triangle



$$\boldsymbol{f(t)} = \frac{\boldsymbol{8A}}{\boldsymbol{\pi}^2}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{9}\cos(3\omega t) + \frac{1}{25}\cos(5\omega t) + \cdots\right]$$

Avec $\omega = {}^{2\pi}/_{T}$

Spectre en fréquence/en pulsation (fréquence = pulsation/2π) :



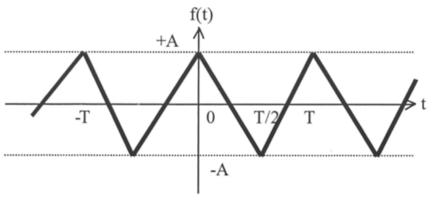
Harmonique de rang 1 : **fondamental**

Harmoniques de rang supérieur

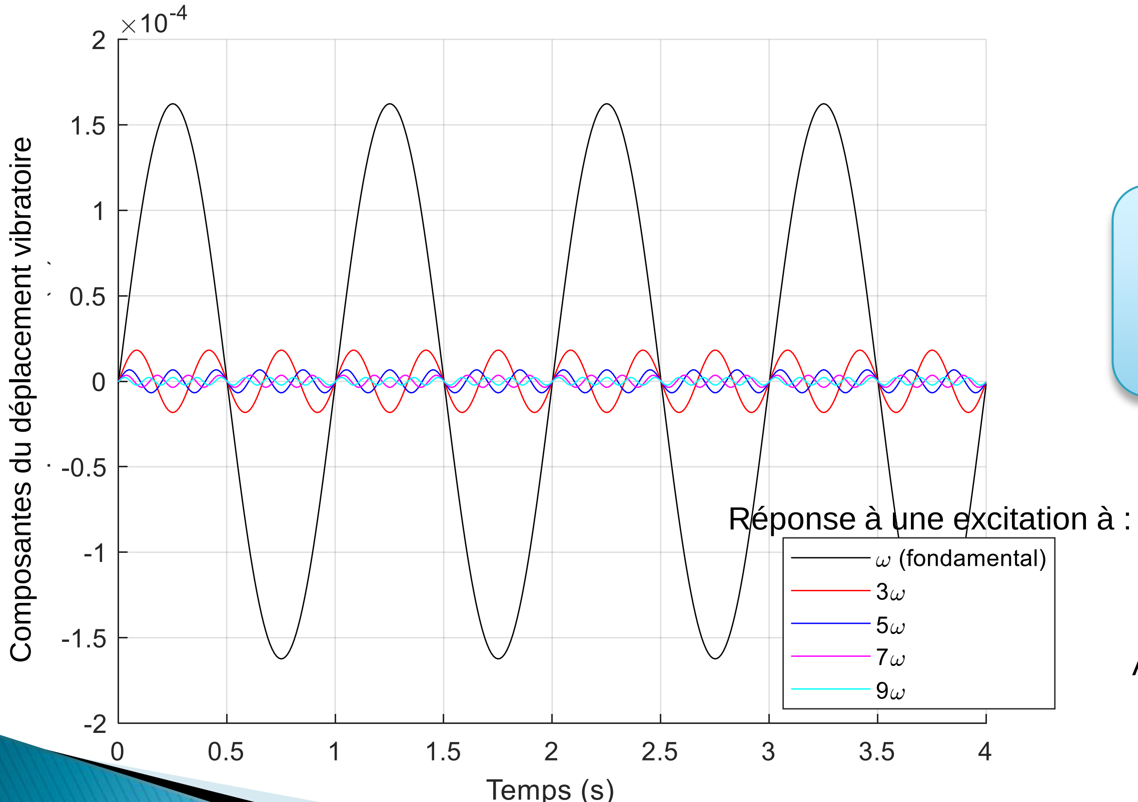
Chapitre 2 – Systèmes à 1 ddl en oscillations forcées

- Soit un oscillateur à 1 ddl avec m=200g, k=5000 N/m et c=8 Ns/m
- Soit une force excitatrice « triangle » :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{8A}}{\boldsymbol{\pi}^2}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{9}\cos(3\omega t) + \frac{1}{25}\cos(5\omega t) + \cdots\right] \; (\omega = {}^{2\pi}/_{T})$$



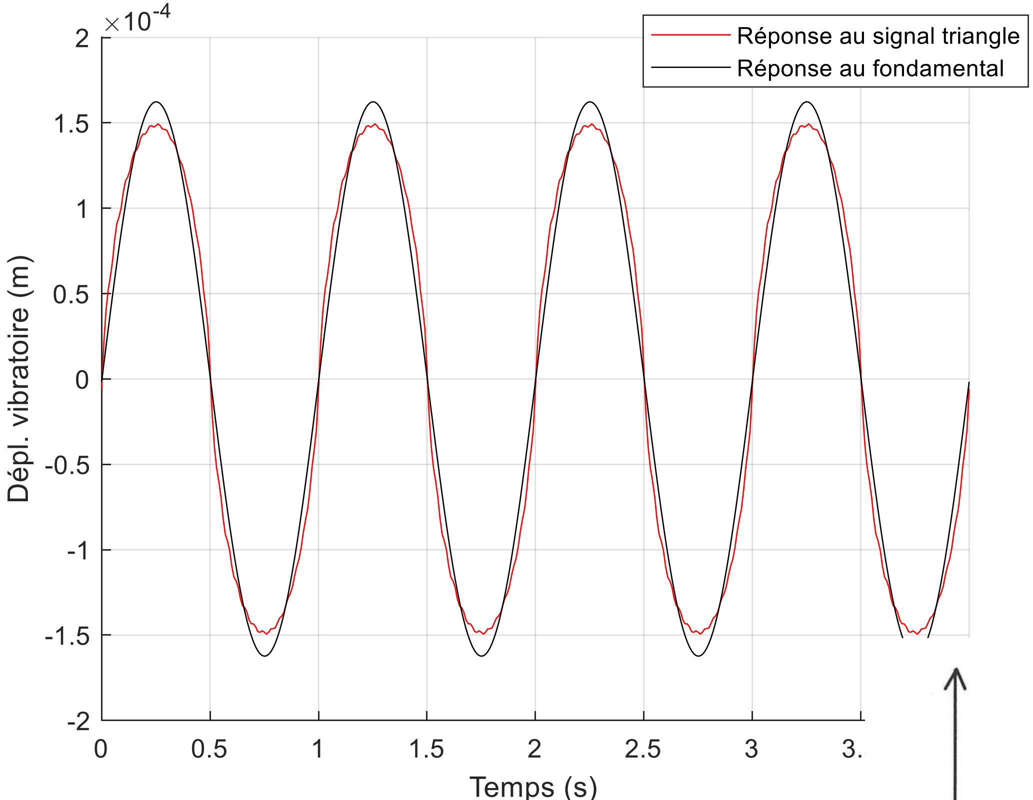
- **Le déplacement vibratoire peut être facilement exprimé**



Réponse à une excitation à ω, 3ω, etc

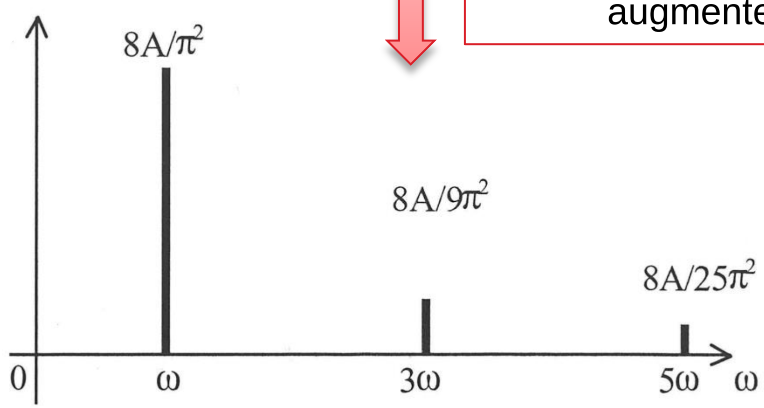
Avec A=1N et T=1s

- Réponse de l'oscillateur au signal triangle : somme de toutes les réponses



La réponse au fondamental est très proche de la réponse au signal « total »

Amplitude décroissante des efforts sinusoïdaux quand la pulsation augmente



Expression du déplacement vibratoire d’un système à 1 degré de liberté en oscillations <u>forcées</u>

2. Régime transitoire / régime permanent (ou établi)

- Les solutions d'une équation différentielle du type $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$ sont la **somme** :
  - D'une **solution de l'équation homogène**, c'est-à-dire à second membre nul, $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$, que l'on notera $x^{homo}(t)$
  - D'une **solution particulière**, que l'on notera $x^{part}(t)$

$$\boldsymbol{x(t) = x^{homo}(t) + x^{part}(t)}$$

- Les solutions de l'**équation homogène** sont les solutions exprimées précédemment pour le cas d'**oscillations libres**, on parlera donc de **réponse libre** et on notera :

$$\boldsymbol{x^{homo}(t) = x^{libre}(t)}$$

- Dans le cas d'un oscillateur **dissipatif**, on sait donc que $\boldsymbol{x^{homo} \rightarrow 0}$ au bout d'un temps caractéristique, $\boldsymbol{\tau}$ (plus ou moins long en fonction de l'importance de l'amortissement)

2. Régime transitoire / régime permanent (ou établi)

- On peut alors distinguer un régime permanent (ou établi) et un régime transitoire :

  - Régime **permanent** : les oscillations « naturelles » sont **totalement amorties**, cad $x^{homo} = 0$ **et** $x(t) = x^{part}(t)$ (pour t $\geq \tau$)
    On parlera de **réponse forcée**, et on notera :

$$x^{part}(t) = x^{forcée}(t)$$

  - Régime **transitoire** : les oscillations « naturelles » ne sont pas encore totalement amorties, on a **coexistence de la réponse libre et de la réponse forcée** et $x(t) = x^{libre}(t) + x^{forcée}(t)$ (pour t $< \tau$)

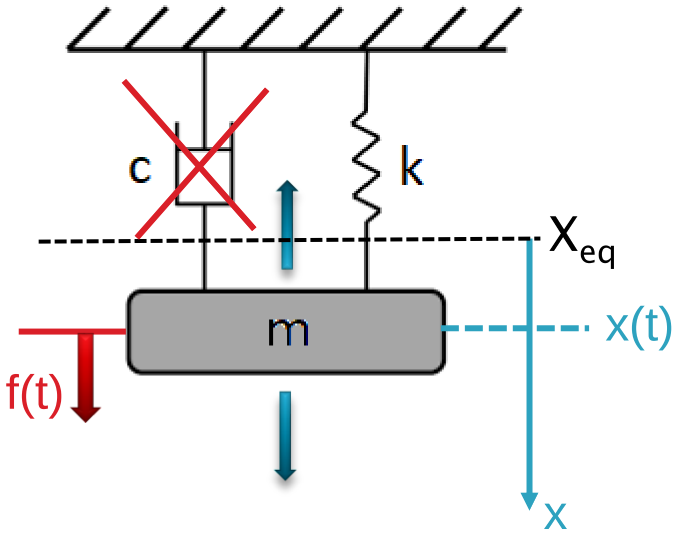
- Sauf mention contraire, quand on étudie la réponse d'un système en oscillations forcées **on se place toujours en régime permanent** et on cherche uniquement à exprimer la réponse forcée, i.e. $x(t) = x^{forcée}(t)$
(on cherche donc une solution particulière de l'équation différentielle)

Détermination des réponses vibratoires

4. Oscillations forcées d'un système conservatif

- Equation différentielle pour le déplacement vibratoire, $x(t)$:

$$\boldsymbol{m\ddot{x}(t)} + \cancel{\boldsymbol{c\dot{x}(t)}} + \boldsymbol{kx(t)} = \boldsymbol{f(t)}$$



- Nous avons établi que la réponse en oscillations libres est du type $\boldsymbol{x^{libre}(t) = X\sin(\omega_0 t + \varphi)}$ avec $X, \varphi \in \mathbb{R}$, ω_0 étant la pulsation propre

- On sait que $x(t) = x^{libre}(t) + x^{forcée}(t)$, **il faut donc déterminer $\boldsymbol{x^{forcée}}$**, cad une solution particulière de l'équation différentielle

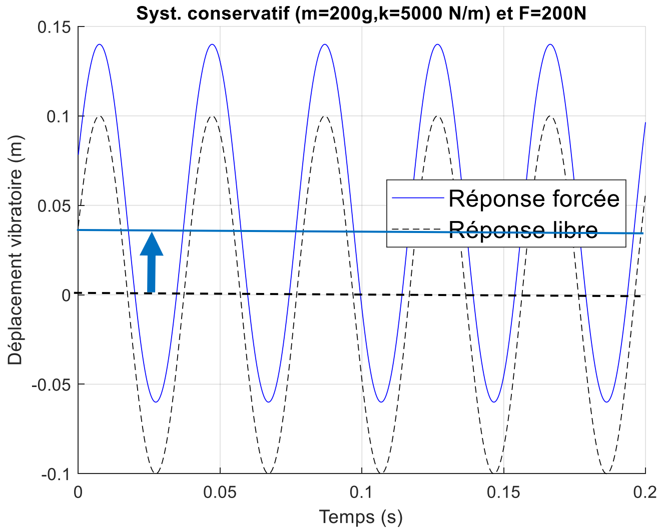
4. Oscillations forcées d'un système conservatif

4.1. Excitation constante

- $f(t) = F$, F constante réelle => équation différentielle $m\ddot{x}(t) + kx(t) = F$
- Une solution particulière est $\boldsymbol{x^{forcée}(t) = \frac{F}{k}}$
- Le déplacement vibratoire est alors la **somme de la réponse forcée et de la réponse libre** :

$$\boldsymbol{x(t) = X\sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F}{k}} \text{ avec } \mathrm{X}, \varphi \in \mathbb{R} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

L'application d'une force constante ne fait que translater la position autour de laquelle la masse oscille



4. Oscillations forcées d'un système conservatif

Voir tuto sur Moodle et annexe

4.2. Excitation sinusoïdale simple

- $\boxed{f(t) = Fsin(\Omega t)}$, $F, \Omega \in \mathbb{R}$ => équation différentielle $\boxed{m\ddot{x}(t) + kx(t) = Fsin(\Omega t)}$

4.2.1. L'excitation n'est pas à la pulsation propre ($\Omega \neq \omega_0$)

➡ $\boxed{x^{forcée}(t) = Xsin(\Omega t)}$

X est l'amplitude de la réponse forcée

➡ Pour un système **conservatif**, **force et réponse forcée sont en phase et ont la même pulsation** **(pour $\Omega \neq \omega_0$)**

En phase : pas de décalage temporel entre les deux signaux ($sin(\Omega t)$ dans les deux cas)

4. Oscillations forcées d'un système conservatif

4.2. Excitation sinusoïdale simple

- $f(t) = Fsin(\Omega t)$, $F, \Omega \in \mathbb{R}$ => équation différentielle $m\ddot{x}(t) + kx(t) = Fsin(\Omega t)$

4.2.1. L'excitation n'est pas à la pulsation propre ($\Omega \neq \omega_0$)

DEMONSTRATION

- D'après le tuto (et rappels en annexe) : $x^{forcée}$ est de la forme $Xsin(\Omega t + \varphi)$ avec $X, \varphi \in \mathbb{R}$
- Injectons $x^{forcée}$ dans l'équation différentielle, on obtient :

$$m(-\Omega^2)Xsin(\Omega t + \varphi) + kXsin(\Omega t + \varphi) = Fsin(\Omega t)$$

- Cette relation doit être vérifiée à tout instant t, dont $t = 0$; alors :

$$(-m\Omega^2 + k)Xsin(\varphi) = 0$$

  - X = 0 ? Aucun intérêt
  - $\Omega^2 = k/m$? Non, par hypothèse $\Omega \neq \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
  - Seule possibilité : $\boldsymbol{\varphi = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{x^{forcée}(t) = Xsin(\Omega t)}$$

4. Oscillations forcées d'un système conservatif

4.2. Excitation sinusoïdale simple 4.2.1. L'excitation n'est pas à la pulsation propre ($\Omega \neq \omega_0$)

- Donc la réponse forcée est $\boldsymbol{x^{forcée}(t) = Xsin(\Omega t)}$. Que vaut l'amplitude X ?

- Si on reprend l'équation différentielle avec cette expression de $x^{forcée}$, on obtient : $-m\Omega^2 Xsin(\Omega t) + kXsin(\Omega t) = Fsin(\Omega t) \Rightarrow -m\Omega^2 X + kX = F$, $\forall t$, d'où :

$$\boxed{\boldsymbol{X = \frac{F}{k - m\Omega^2}}}$$

On rappelle que $\Omega \neq \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- Solution globale, $x(t) = x^{libre}(t) + x^{forcée}(t)$, pour une excitation $f(t) = Fsin(\Omega t)$:

$$\boldsymbol{x(t) = Asin(\omega_0 t + \psi) + \frac{F}{k-m\Omega^2} sin(\Omega t)} \quad \mathrm{A}, \psi \in \mathbb{R}$$

- Dans un système réel (dissipatif), la réponse libre finit toujours par s'annuler
- <u>Même si cela n'a pas de sens pour un système conservatif</u>, on fera généralement l'approximation $\boldsymbol{x(t) \approx x^{forcée}(t) = \frac{F}{k-m\Omega^2} sin(\Omega t)}$

4. Oscillations forcées d'un système conservatif

4.2. Excitation sinusoïdale simple

4.2.1. L'excitation n'est pas à la pulsation propre ($\Omega \neq \omega_0$)

- $x(t) \approx x^{forcée}(t) = \frac{F}{k - m\Omega^2} sin(\Omega t)$: notez une nouvelle fois que la **force impose la pulsation et que force et déplacement vibratoire sont en phase** (si on néglige la réponse libre)
- Transformons l'expression de $x(t)$ en $x(t) = \frac{\frac{F}{k}}{1 - \frac{m}{k}\Omega^2} sin(\Omega t) = \frac{\frac{F}{k}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}} sin(\Omega t)$:

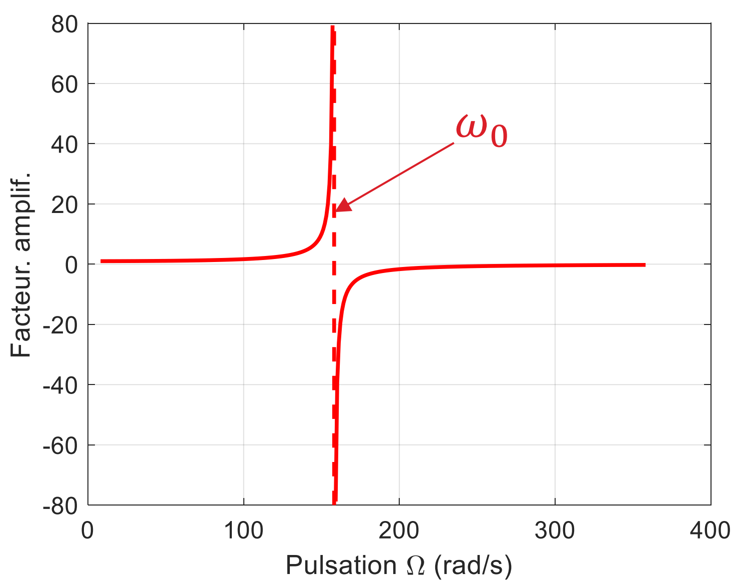
$\boldsymbol{\frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}}$ **est appelé facteur d'amplification**

4. Oscillations forcées d'un système conservatif

4.2. Excitation sinusoïdale simple

4.2.1. L'excitation n'est pas à la pulsation propre ($\Omega \neq \omega_0$)

- Le facteur d'amplification $\frac{1}{1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}$ mesure donc le ratio $\mathrm{k}x(t)/f(t)$
- Evolution du facteur d'amplification avec Ω (pulsation de la force excitatrice) ?
  - ➡ Très forte augmentation **à l'approche de la pulsation propre, ω_0, et l'amplitude du déplacement vibratoire, X, tend vers l'infini !**



Principe de l'essai « en sinus balayé » :
On excite la structure avec $f(t) = Fsin(\Omega t)$, avec Ω variant progressivement dans une gamme de pulsation donnée.
Lorsque le facteur d'amplification augmente très fortement, **pulsation propre (et donc fréquence propre) sont identifiées**

Remarque : pour un système réel, dissipatif, l'amplitude ne tend pas vers l'infini grâce à l'amortissement (voir suite du cours !)

4. Oscillations forcées d'un système conservatif

4.2. Excitation sinusoïdale simple

4.2.2. Et si l'excitation est exactement à la pulsation propre ($\Omega = \omega_0$) ??

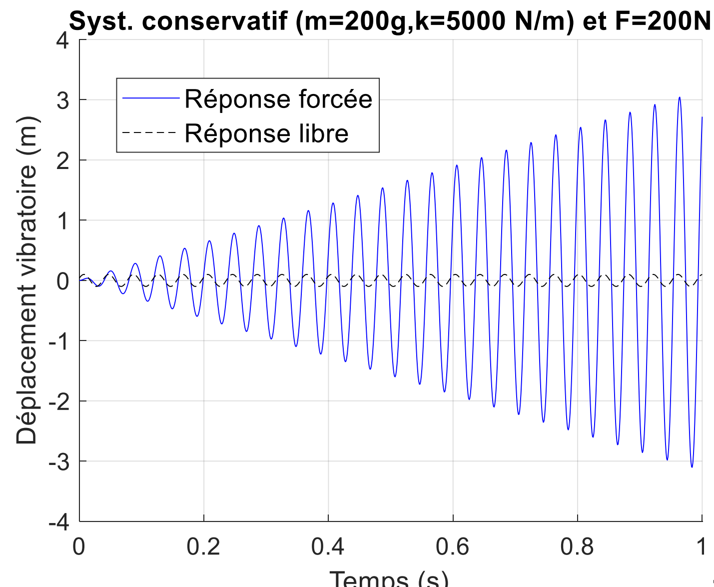
- $f(t) = F\sin(\omega_0 t)$ et : $\boxed{x^{forcée}(t) = \dfrac{F}{2m\omega_0} \boxed{t} \sin(\omega_0 t)}$

Voir tuto sur Moodle et annexe

- Réponse globale $x(t) = x^{libre}(t) + x^{forcée}(t)$, et :

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \psi) + \frac{F}{2m\omega_0} \boxed{t} \sin(\omega_0 t), \text{ avec } A, \psi \in \mathbb{R}}$$

L'amplitude croît linéairement avec le temps :
la structure est en résonance !



- Cette fois, on peut parler de « régime permanent » quand $A\cos(\omega_0 t + \psi) \ll \dfrac{F}{2m\omega_0} t\sin(\omega_0 t)$

et alors $x(t) \approx \dfrac{F}{2m\omega_0}\, t \sin(\omega_0 t)$

4. Oscillations forcées d'un système conservatif

4.2. Excitation sinusoïdale simple

4.2.2. Et si l'excitation est exactement à la pulsation propre ($\Omega = \omega_0$) ??

DEMONSTRATION DE L'EXPRESSION DE $x^{forcée}(t)$

- $f(t) = Fsin(\omega_0 t)$, $F \in \mathbb{R}$ => équation différentielle $m\ddot{x}(t) + kx(t) = Fsin(\omega_0 t)$
- D'après l'annexe, $x^{forcée}$ est de la forme $\boldsymbol{x^{forcée}(t) = t\, Xsin(\omega_0 t + \varphi)}$ avec $X, \varphi \in \mathbb{R}$ (ensemble des solutions particulières de l'équation différentielle)
- Injectons $x^{forcée}$ dans l'équation différentielle :

$$m[\omega_0 Xcos(\omega_0 t + \varphi) + X\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) - tX\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)] + kXtsin(\omega_0 t + \varphi) = Fsin(\omega_0 t)$$

- Avec $k = m\omega_0^2$: $m\omega_0 X[2cos(\omega_0 t + \varphi) - t\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 tsin(\omega_0 t + \varphi)\ ] = 2m\omega_0 Xcos(\omega_0 t + \varphi) = Fsin(\omega_0 t)$, qui doit être valable en $t = 0$, ce qui implique $cos(\varphi) = 0$, soit $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ (prenons $\varphi = -\frac{\pi}{2}$), et donc $cos(\omega_0 t + \varphi) = sin(\omega_0 t)$
- On aboutit finalement à $\boldsymbol{X = \frac{F}{2m\omega_0}}$ et :

$$\boxed{\boldsymbol{x^{forcée}(t) = \frac{F}{2m\omega_0} tsin(\omega_0 t)}}$$

4. Oscillations forcées d'un système conservatif

4.3. Excitation par une fonction périodique quelconque

- Soit $f(t)$ une fonction périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$
- On utilise une décomposition en série de Fourier : $f(t) \approx F_0 + \sum_{h=1}^{\infty} F_h sin(h\Omega t)$ $(h \in \mathbb{N}, F_h \in \mathbb{R}\ \forall h)$
- On parle d'excitation harmonique car toutes les pulsations sont des multiples de Ω
- La réponse forcée est alors **la somme des réponses associées à chaque terme de la décomposition de $f(t)$**

4.3.1. Si $\mathbf{h}\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega_0} \forall h$

$$\boldsymbol{x^{forcée}(t) = \frac{F_0}{k} + \sum_{h=1}^{\infty} X_h sin(h\Omega t)} \text{ avec } \boldsymbol{X_h = \frac{F_h}{k - m(h\Omega)^2}\ \forall h}$$

4.3.2. Si $\exists \mathbf{h}$ tel que $\mathbf{h}\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega_0}$

Le terme correspondant est **remplacé par $\boldsymbol{\frac{F_h}{2m\omega_0} t sin(\omega_0 t)}$** dans l'expression de $x^{forcée}(t)$

BILAN : Déplacement vibratoire d'un **oscillateur conservatif (= non amorti) en oscillations forcées**

- L'équation différentielle pour le déplacement vibratoire, $x(t)$, est

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

- La réponse libre est $\boldsymbol{x^{libre}(t) = Asin(\omega_0 t + \varphi)}$ avec $A, \varphi \in \mathbb{R}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ étant la pulsation propre

- La réponse forcée à une excitation sinusoïdale simple, $f(t) = Fsin(\Omega t)$, est :
  - Si $\boldsymbol{\Omega \neq \omega_0}$: $\boldsymbol{x^{forcée}(t) = Xsin(\Omega t)}$ avec $X \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{X = \frac{F}{k - m\Omega^2}}$
  - Si $\boldsymbol{\Omega = \omega_0}$: $\boldsymbol{x^{forcée}(t) = \frac{F}{2m\omega_0} t sin(\omega_0 t)}$, il y a **résonance**
  - **Dans tous les cas, force et réponse forcée sont en phase et ont la même pulsation**, Ω

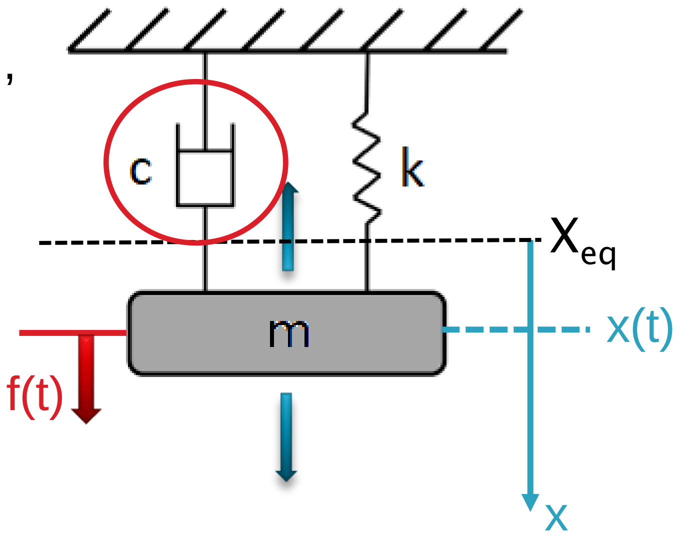
Qu'en est-il pour un oscillateur dissipatif ?

5. Oscillations forcées d'un système dissipatif (réel) en amortissement sous-critique

- Rappel :
  - Le régime d'**amortissement sous-critique** est le seul pour lequel la masse oscille (voir Chapitre 1)
  - Il est caractérisé par une **viscosité inférieure à la viscosité critique** : $c < c_c$ avec $c_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_0$ et par un **taux d'amortissement** $\boldsymbol{\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_0} < 1}$

- Equation différentielle du déplacement vibratoire, $x(t)$, pour un système **dissipatif** en **oscillations forcées** :

$$\boldsymbol{m\ddot{x}(t) + \boxed{c\dot{x}(t)} + kx(t) = f(t)}$$



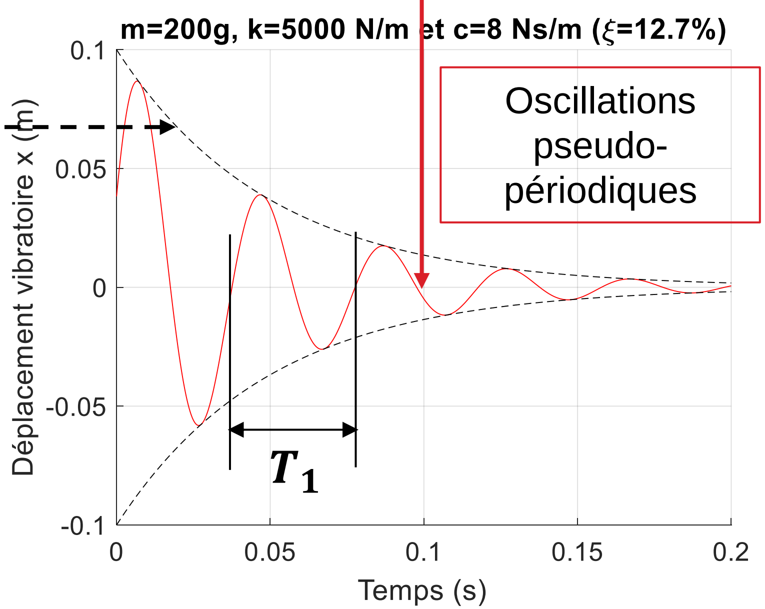
5. Oscillations forcées d'un système dissipatif (réel) en amortissement sous-critique

- Rappel : on a déjà déterminé la solution de l'équation homogène $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$, cad la réponse du système dissipatif en **oscillations libres** :

$$\boldsymbol{x^{libre}(t) = \underbrace{Xe^{-\xi\omega_0 t}}_{\text{Amplitude décroissante (amortissement)}} \sin(\omega_1 t + \varphi)}$$

Avec :

- $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$, la pulsation propre
- $\boldsymbol{\xi} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_0}$, le taux d'amortissement
- $\boldsymbol{\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$, la pulsation naturelle
- $\boldsymbol{f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}}$ et $\boldsymbol{T_1 = \frac{1}{f_1}}$, la fréquence naturelle et la pseudo période, respectivement

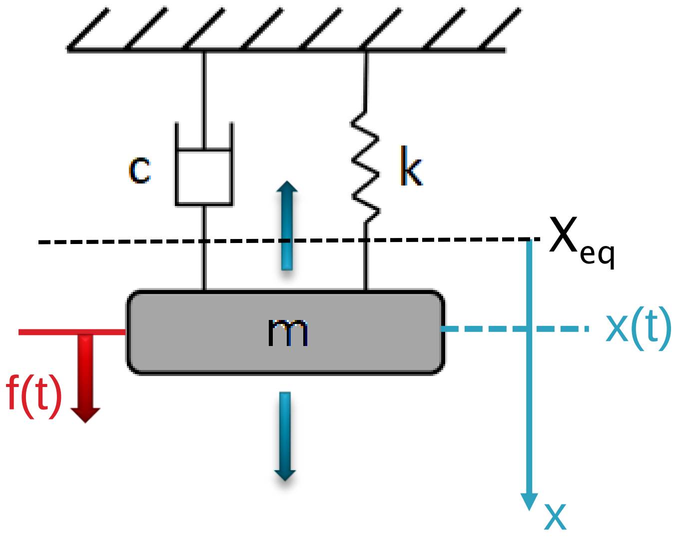


Chapitre 2 – Systèmes à 1 ddl en oscillations forcées

5. Oscillations forcées d'un système <u>dissipatif</u> (réel) en amortissement sous-critique

Cherchons maintenant la réponse forcée

5.1. Excitation constante



- $\boldsymbol{m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)}$ avec $\boldsymbol{f(t) = F_0} \in \mathbb{R}$
- Alors une solution particulière donne la réponse forcée $x^{forcée}(t) = \frac{F_0}{k}$
- La solution globale, $x(t) = x^{libre}(t) + x^{forcée}(t)$ est alors :

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = Xe^{-\xi\omega_0 t} sin(\omega_1 t + \varphi) + \frac{F_0}{k}}}$$

➡ **La masse oscille autour d'une nouvelle position $\boldsymbol{X_{eq} + \frac{F_0}{k}}$** (dans le repère global)

➡ En **régime permanent**, $x^{libre}(t) = Xe^{-\xi\omega_0 t} sin(\omega_1 t + \varphi) = 0$ et $\boldsymbol{x(t) = \frac{F_0}{k}}$: si l'excitation est maintenue, **m reste à la position $\boldsymbol{\frac{F_0}{k}}$** ($X_{eq} + \frac{F_0}{k}$ dans le repère global)

5. Oscillations <u>forcées</u> d'un système <u>dissipatif</u> (réel) en amortissement sous-critique

5.2. Excitation sinusoïdale simple, $f(t) = Fsin(\Omega t)$

- La réponse forcée d'un oscillateur **dissipatif** {m,k,c} subissant une excitation sinusoïdale du type $f(t) = Fsin(\Omega t)$ est :

$$\boxed{x^{forcée}(t) = Xsin(\Omega t + \varphi)}$$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $X, \varphi \in \mathbb{R}$)

Avec : $$\boxed{X = \frac{F}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2+(c\Omega)^2}}}$$ et $$\boxed{\varphi = arctan\left(\frac{-c\Omega}{k-m\Omega^2}\right)}$$

La force excitatrice impose la pulsation

Force et déplacement vibratoire sont déphasés
(sauf si c=0 – système conservatif)

Réponse forcée d'un oscillateur dissipatif : **démonstration**

- L'équation différentielle est $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = Fsin(\Omega t)$ avec $F, \Omega \in \mathbb{R}$
- L'ensemble des solutions particulières réelles est donné par (voir tuto) :

$$\boldsymbol{x^{forcée}(t) = Acos(\Omega t) + Bsin(\Omega t)} \ (1)$$

ou, de façon équivalente, par $\boldsymbol{x^{forcée}(t) = Xsin(\Omega t + \varphi)}$ (2), avec $A, B, X, \varphi \in \mathbb{R}$

- Pour faciliter la résolution, on peut aussi raisonner sur l'ensemble des solutions complexes :

$$\boldsymbol{x^{forcée}(t) = X_1 e^{j(\Omega t+\varphi)} + X_2 e^{-j(\Omega t+\varphi)}} \text{ avec } \boldsymbol{X_1, X_2} \in \mathbb{C}\text{, à valeur dans } \mathbb{C}$$

Et le sous-ensemble des solutions réelles, lorsque $\boldsymbol{X_1}$ et $\boldsymbol{X_2}$ sont des complexes conjugués :

$$\boxed{\boldsymbol{x^{forcée}(t) = X' e^{j(\Omega t+\varphi)} + \bar{X}' e^{-j(\Omega t+\varphi)}} \ (3) \ \textbf{avec } \boldsymbol{X'} \in \mathbb{C}\textbf{, à valeurs dans } \mathbb{R}}$$

(2) **et** (3) **sont équivalentes pour** $\boldsymbol{X' = -j\frac{X}{2}}$

Réponse forcée d'un oscillateur dissipatif : **démonstration**

- Introduisons cette expression de $x^{forcée}(t)$ dans l'équation différentielle $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$, avec :
  - $\dot{x}^{forcée}(t) = j\Omega X' e^{j(\Omega t+\varphi)} - j\Omega \bar{X}' e^{-j(\Omega t+\varphi)}$
  - $\ddot{x}^{forcée}(t) = -\Omega^2 X' e^{j(\Omega t+\varphi)} - \Omega^2 \bar{X}'^{e^{-j(\Omega t+\varphi)}}$
  - Alors : $-m\Omega^2\left[X' e^{j(\Omega t+\varphi)} + \bar{X}' e^{-j(\Omega t+\varphi)}\right] + jc\Omega\left[X' e^{j(\Omega t+\varphi)} - \bar{X}' e^{-j(\Omega t+\varphi)}\right] + k\left[X' e^{j(\Omega t+\varphi)} + \bar{X}' e^{-j(\Omega t+\varphi)}\right] = f(t)$

- $f(t)$ peut aussi être exprimée sous forme exponentielle :

$$f(t) = Fsin(\Omega t) = F\left(\frac{e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}}{2j}\right) = -j\frac{F}{2}\left(e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}\right)$$

- Factorisons par $e^{j\Omega t}$ et $e^{-j\Omega t}$, on aboutit à :

$$e^{j\Omega t}\left[[-m\Omega^2 + jc\Omega + k]X' e^{j\varphi}\right] + e^{-j\Omega t}\left[[-m\Omega^2 - jc\Omega + k]\bar{X}'^{e^{-j\varphi}}\right] = -j\frac{F}{2}\left(e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}\right)$$

- On doit donc vérifier que $[-m\Omega^2 + jc\Omega + k]X'^{e^{j\varphi}} = -j\frac{F}{2}$ et que $[-m\Omega^2 - jc\Omega + k]\bar{X}'^{e^{-j\varphi}} = j\frac{F}{2}$

Réponse forcée d'un oscillateur dissipatif : **démonstration**

- Egalité des termes en $e^{j\Omega t}$: $[-m\Omega^2 + jc\Omega + k]X' e^{j\varphi} = -j\frac{F}{2}$?
- L'égalité entre deux nombres complexes est donnée par l'égalité des modules et l'égalité des arguments
  - Egalité des modules : $\sqrt{(-\boldsymbol{m\Omega^2} + \boldsymbol{k})^2 + (\boldsymbol{c\Omega})^2}|\boldsymbol{X'}| = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{2}}$
  - Egalité des arguments : $\arg(-m\Omega^2 + jc\Omega + k) + \arg(X') + \arg(e^{j\varphi}) = \arg(-j\frac{F}{2})$
    $\Rightarrow \boldsymbol{arctan}\left(\frac{\boldsymbol{c\Omega}}{-\boldsymbol{m\Omega^2}+\boldsymbol{k}}\right) - \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{\varphi} = -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}$ car $X' = -j\frac{X}{2}$ est un imaginaire pur
    (voir diapo 30)

Finalement :

$|X'| = \frac{X}{2} = \frac{\frac{F}{2}}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2+(c\Omega)^2}} \Rightarrow \boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{F}}{\sqrt{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{m\Omega^2})^2+(\boldsymbol{c\Omega})^2}}$ et $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{arctan}\left(\frac{-\boldsymbol{c\Omega}}{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{m\Omega^2}}\right)$ dans

$\boldsymbol{x^{forcée}(t)} = \boldsymbol{X sin(\Omega t + \varphi)}$

Réponse forcée d'un oscillateur dissipatif : **démonstration**

- Egalité des termes en $e^{-j\Omega t}$: $[-m\Omega^2 - jc\Omega + k]\bar{X}'e^{-j\varphi} = j\frac{F}{2}$?
  - Egalité des modules : $\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}|\bar{X}'| = \frac{F}{2}$
  - Egalité des arguments : $\Rightarrow arctan\left(\frac{-c\Omega}{k-m\Omega^2}\right) + \frac{\pi}{2} - \varphi = +\frac{\pi}{2}$ car $\bar{X}' = j\frac{X}{2}$

Finalement : $|\bar{X}'| = \frac{X}{2} \Rightarrow \boldsymbol{X = \frac{F}{\sqrt{\left(k-m\Omega^2\right)^2+(c\Omega)^2}}}$ et $\boldsymbol{\varphi = arctan\left(\frac{-c\Omega}{k-m\Omega^2}\right)}$

On retrouve exactement les mêmes expressions !

- Partant de ce constat, **on s'autorisera quelques « approximations » pour la résolution** des équations différentielles et la détermination de la réponse forcée ; Ainsi on pourra poser (bien que ce ne soit pas vrai « mathématiquement ») :

$$\boldsymbol{x^{forcée}(t) = Xsin(\Omega t + \varphi) = Xe^{j(\Omega t+\varphi)}} \text{ et } \boldsymbol{f(t) = Fsin(\Omega t) = Fe^{j\Omega t}}$$

5. Oscillations forcées d'un système dissipatif (réel) en amortissement sous-critique

5.2. Excitation sinusoïdale simple, $f(t) = F\sin(\Omega t)$

- Autres expressions pour X et φ :
  dans la pratique, il est souvent utile d'exprimer le déplacement vibratoire en fonction de la **pulsation propre, $\boldsymbol{\omega_0}$**, et du **taux d'amortissement, $\boldsymbol{\xi}$**

- On rappelle que $\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}$ et $\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{2m\omega_0}}$ et donc $\frac{c}{k} = \frac{2\xi}{\omega_0}$

- $X = \dfrac{F}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2+(c\Omega)^2}} = \dfrac{F}{k\sqrt{\left(1-\frac{m}{k}\Omega^2\right)^2+\left(\frac{c}{k}\Omega\right)^2}} \Longrightarrow \boxed{X = \dfrac{F/k}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}}$

- $\varphi = \arctan\left(\dfrac{-c\Omega}{k-m\Omega^2}\right) = \arctan\left(\dfrac{-\frac{c}{k}\Omega}{1-\frac{m}{k}\Omega^2}\right) \Longrightarrow \boxed{\varphi = \arctan\left(\dfrac{-2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}\right)}$

5. Oscillations forcées d'un système dissipatif (réel) en amortissement sous-critique

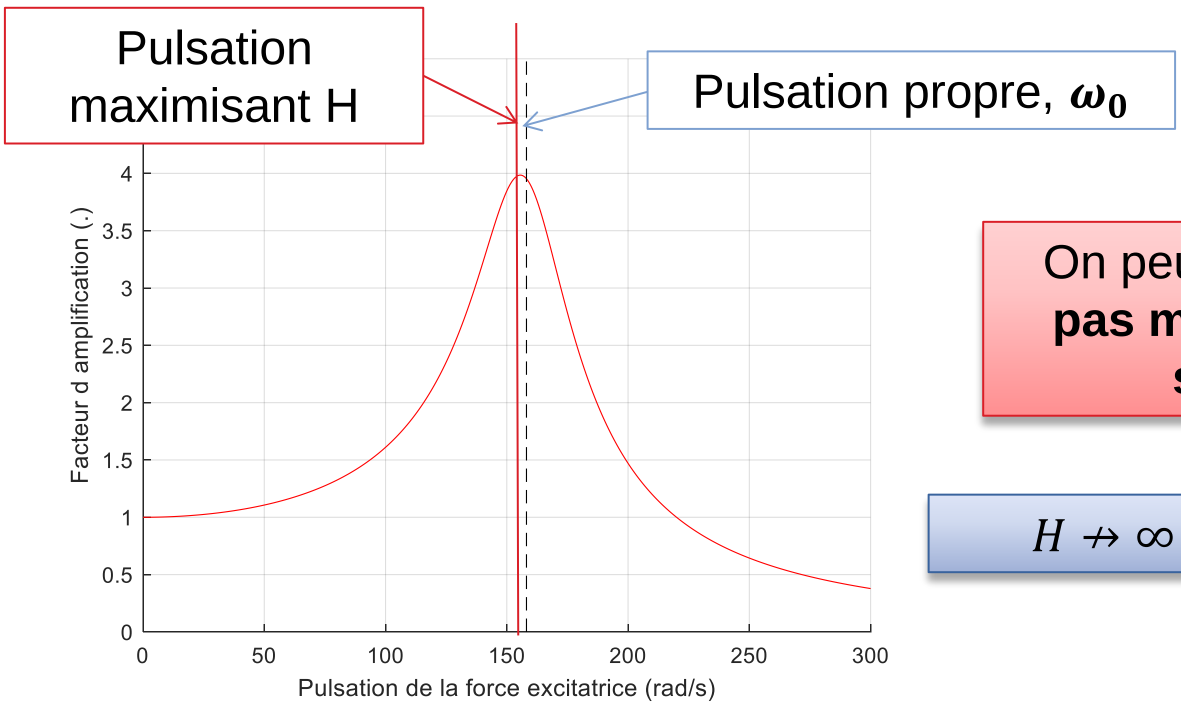
5.2. Excitation sinusoïdale simple, $f(t) = F\sin(\Omega t)$

- Solution globale : $x(t) = x^{libre}(t) + x^{forcée}(t)$
  - En **régime transitoire** :
    - **La réponse libre n'est pas encore dissipée**
    - $x(t) = Ae^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_1 t + \psi) + X\sin(\Omega t + \varphi)$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $A, X, \psi, \varphi \in \mathbb{R}$)
  - En **régime permanent** :
    - La **réponse libre est nulle sous l'effet de l'amortissement**
    - $x(t) = X\sin(\Omega t + \varphi)$ (**Ω la pulsation de la force excitatrice**)
- **Facteur d'amplification pour l'oscillateur dissipatif en régime permanent** :

$$\boxed{H(\Omega) = \frac{X}{F/k} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\Omega}{\omega_0}\right)^2}}}$$

- Facteur d'amplification pour l'oscillateur dissipatif en régime permanent :

$$\boxed{H(\Omega) = \frac{X}{F/k} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\Omega}{\omega_0}\right)^2}}}$$



On peut remarquer que ***H*** **n'est pas maximum en** $\boldsymbol{\omega_0}$ **pour un système dissipatif**

$H \nrightarrow \infty$ grâce à l'amortissement

5. Oscillations forcées d'un système dissipatif (réel) en amortissement sous-critique

5.2. Excitation sinusoïdale simple, $f(t) = Fsin(\Omega t)$

Résonance d'amplitude du déplacement

- On a résonance d'amplitude du déplacement lorsque $H(\Omega)$ **est maximal**

La résonance d'amplitude a lieu pour une excitation à $\Omega = \Omega_{RA} = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$

$$H(\Omega_{RA}) = H_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = max\left(\frac{X}{F/k}\right)$$

- Démo : $\frac{dH(\Omega)}{d\Omega} = -\frac{1}{2}\left[2\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)\left(-2\frac{\Omega}{\omega_0^2}\right) + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\right)^2 2\Omega\right]\left[\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$

$\frac{dH(\Omega)}{d\Omega} = 0$ pour Ω=0, ce qui n'a aucun intérêt ($f(t)$=0) ou pour $\Omega = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$ pour $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ *

- $\varphi(\Omega_{RA}) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\xi}\right)$, ce qui ne correspond pas à une valeur remarquable

** : Si $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$ il n'y a pas de résonance (système trop amorti) et H décroît continuellement quand Ω augmente)

5. Oscillations forcées d'un système dissipatif (réel) en amortissement sous-critique

5.2. Excitation sinusoïdale simple, $f(t) = Fsin(\Omega t)$

Résonance de phase

- On a **résonance de phase** lorsque $\mathbf{tan(\varphi)} \to \infty$

La résonance de phase a lieu pour une excitation à
$$\boldsymbol{\Omega = \Omega_{RP} = \omega_0}$$
$\boldsymbol{\varphi(\Omega_{RP}) = \frac{\pi}{2}}$: on dit que **force et déplacement vibratoire sont en quadrature de phase à la résonance de phase**

- Démo : $tan(\varphi) = \frac{-2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$, donc $\tan(\varphi) \to \infty \Rightarrow \boldsymbol{\Omega = \omega_0}$
- $H(\omega_0) = \frac{1}{2\xi}$, ce qui n'est pas une valeur remarquable (sauf pour un système conservatif !)
- Oscillateur conservatif ou **très faiblement amorti** : $\boldsymbol{\xi \ll 1}$ et $\Omega_{RA} = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2} \approx \omega_0$, <u>dans ce cas</u> **résonances de phase et d'amplitude ont lieu pour** $\boldsymbol{\Omega_{RA} \approx \Omega_{RP} = \omega_0}$

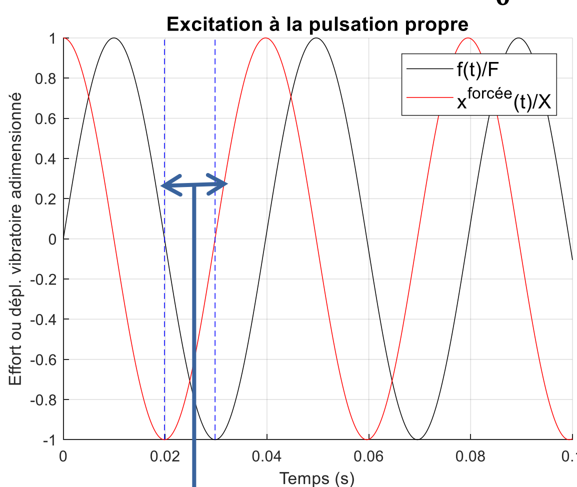
5. Oscillations forcées d'un système dissipatif (réel) en amortissement sous-critique

5.2. Excitation sinusoïdale simple, $f(t) = Fsin(\Omega t)$

Résonance de phase

- Force et déplacement vibratoire sont en **quadrature de phase** à la résonance de phase ($\varphi(\Omega_{RP}) = \frac{\pi}{2}$ **avec** $\Omega_{RP} = \omega_0$)

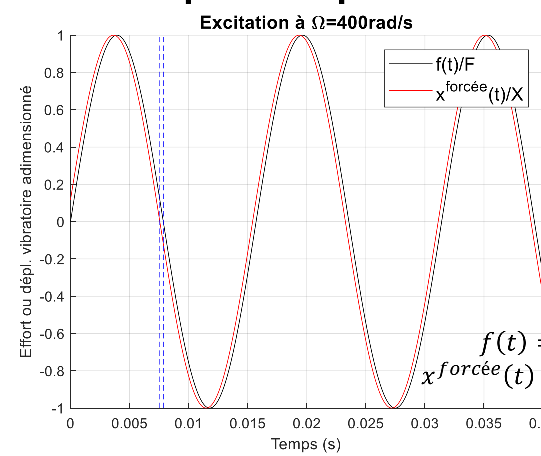
Excitation à $\Omega = \omega_0$



Déphasage de $\frac{\pi}{2}$ $\leftrightarrow$ $\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega_0}$

$$f(t) = Fsin(\omega_0 t)$$
$$x^{forcée}(t) = Xsin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$

Fréquence d'excitation quelconque



$$f(t) = Fsin(\Omega t)$$
$$x^{forcée}(t) = Xsin(\Omega t + \varphi)$$

Déphasage de φ $\leftrightarrow$ $\Delta t = \varphi\frac{T}{2\pi}$
(dans cet ex. φ=0.118 rad et $\Delta t = 2.9\ 10^{-4} s$

Avec m=200g, k=5000N/m, c=8Ns/m (soit ω_0=158rad/s et ξ=12.65%) et F=200N (donne X=158.1mm)

BILAN : Déplacement vibratoire d'un **oscillateur dissipatif (= amorti) en oscillations forcées**

- L'équation différentielle pour le déplacement vibratoire, $x(t)$, est :

$$\boldsymbol{m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)}$$

- La réponse libre est $\boldsymbol{x^{libre}(t) = Ae^{-\xi\omega_0 t}sin(\omega_1 t + \psi)}$ avec $A, \psi \in \mathbb{R}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ étant la pulsation propre, $\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$, la pulsation naturelle et ξ le taux d'amortissement

- La réponse forcée à une excitation sinusoïdale simple, $\boldsymbol{f(t) = Fsin(\Omega t)}$, est :

$$\boldsymbol{x^{forcée}(t) = Xsin(\Omega t + \varphi)} \text{ avec } X, \varphi \in \mathbb{R}$$

et $\boldsymbol{X = \frac{F}{\sqrt{\left(k-m\Omega^2\right)^2+(c\Omega)^2}} = \frac{F/k}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}}$ et $\boldsymbol{\varphi = arctan\left(\frac{-c\Omega}{k-m\Omega^2}\right) = arctan\left(\frac{-2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}\right)}$

- **La force et le déplacement vibratoire en régime permanent (=réponse forcée) ont toujours la même pulsation,** $\boldsymbol{\Omega}$
- Il y a **résonance d'amplitude** du déplacement vibratoire lorsque $\boldsymbol{\Omega = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}}$, et **résonance de phase** lorsque $\boldsymbol{\Omega = \omega_0}$

Memento Chapitres 1 et 2 – Systèmes à 1 ddl

- Expression générale du déplacement vibratoire, x(t)

Nature de l'oscillateur	Réponse libre	Réponse forcée pour $f(t) = Fsin(\Omega t)$
Conservatif	$x^{libre}(t) = X_1 sin(\omega_0 t + \varphi_1)$ avec $X_1, \varphi_1 \in \mathbb{R}$ Ou $x^{libre}(t) = A_1 sin(\omega_0 t) + B_1 cos(\omega_0 t)$ avec $A_1, B_1 \in \mathbb{R}$	Si $\Omega \neq \omega_0$: $x^{forcée}(t) = X_3 sin(\Omega t)$ avec $X_3 = \frac{F}{k-m\Omega^2}$ $(\in \mathbb{R})$ Si $\Omega = \omega_0$: $x^{forcée}(t) = \frac{F}{2m\omega_0} tcos(\omega_0 t)$ (tend vers l'∞)
Dissipatif (amortissement sous-critique)	$x^{libre}(t) = X_2 e^{-\xi\omega_0 t} sin(\omega_1 t + \varphi_2)$ avec $X_2, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ ou $x^{libre}(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\begin{bmatrix} A_2 sin(\omega_1 t) + \\ B_2 cos(\omega_1 t) \end{bmatrix}$ avec $A_2, B_2 \in \mathbb{R}$	$x^{forcée}(t) = X_4 sin(\Omega t + \varphi_4)$ avec $X_4 =$ $\frac{F/k}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$ et $\varphi_4 = -arctan\left(\frac{2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}}{1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}\right)$, $X_4, \varphi_4 \in \mathbb{R}$

Petit exercice

- Soit une structure dont le comportement vibratoire peut être modélisé par un oscillateur à un degré de liberté $\{m\,; k\,; c\}$
- On a identifié $m = 200g$, $k = 5000\ N/m$ et $c = 7\ Ns/m$

- On provoque les oscillations du système à un instant t_0. L'amplitude du déplacement vibratoire $x(t)$ à cet instant est $X_0 = 10mm$ et la vitesse vibratoire est $V_0 = 1m/s$

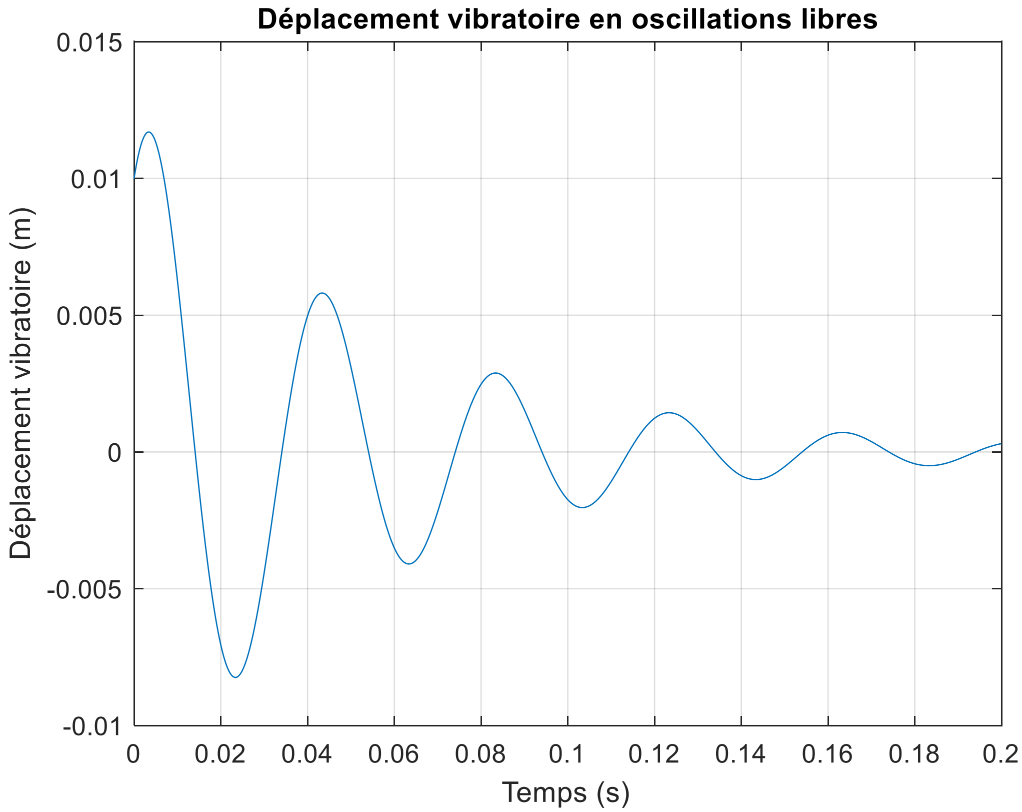
- Donnez l'expression du déplacement vibratoire, $x(t)$

- On applique sur la structure une force excitatrice $f(t) = Fsin(\omega t)$, d'amplitude 1 kN et de fréquence 10Hz

- Donnez la nouvelle expression du déplacement vibratoire, $x(t)$, en régime permanent. Calculez son amplitude.

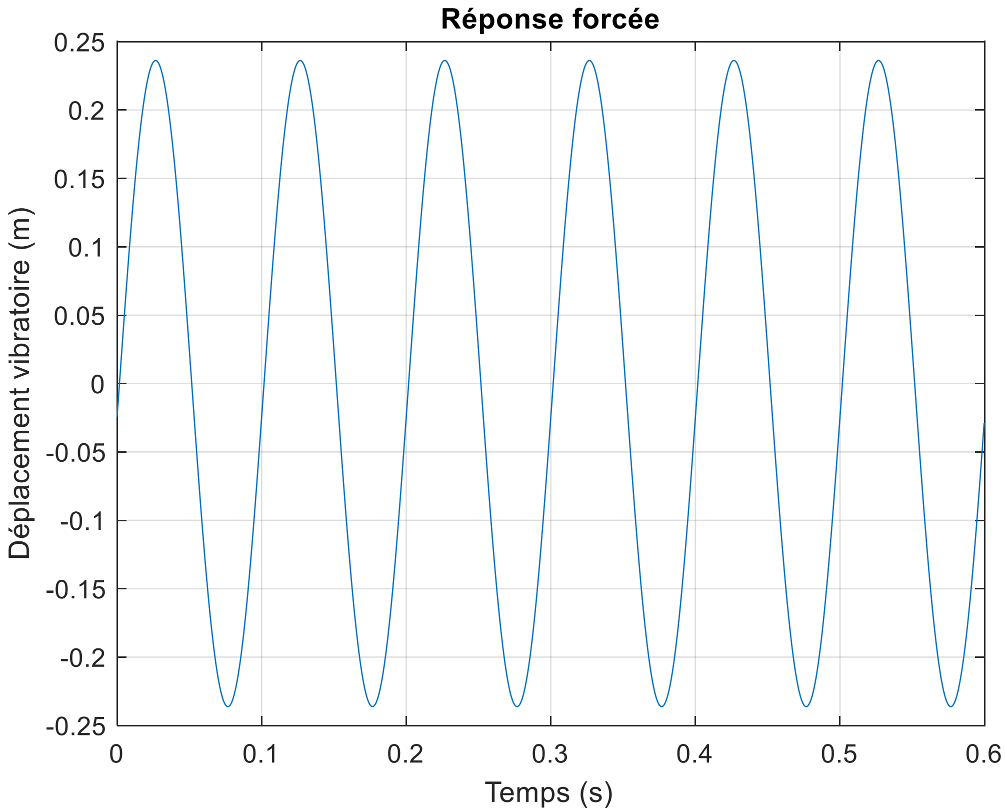
Déplacements vibratoires en fonction du temps

- Cas 1 : **Oscillations libres**



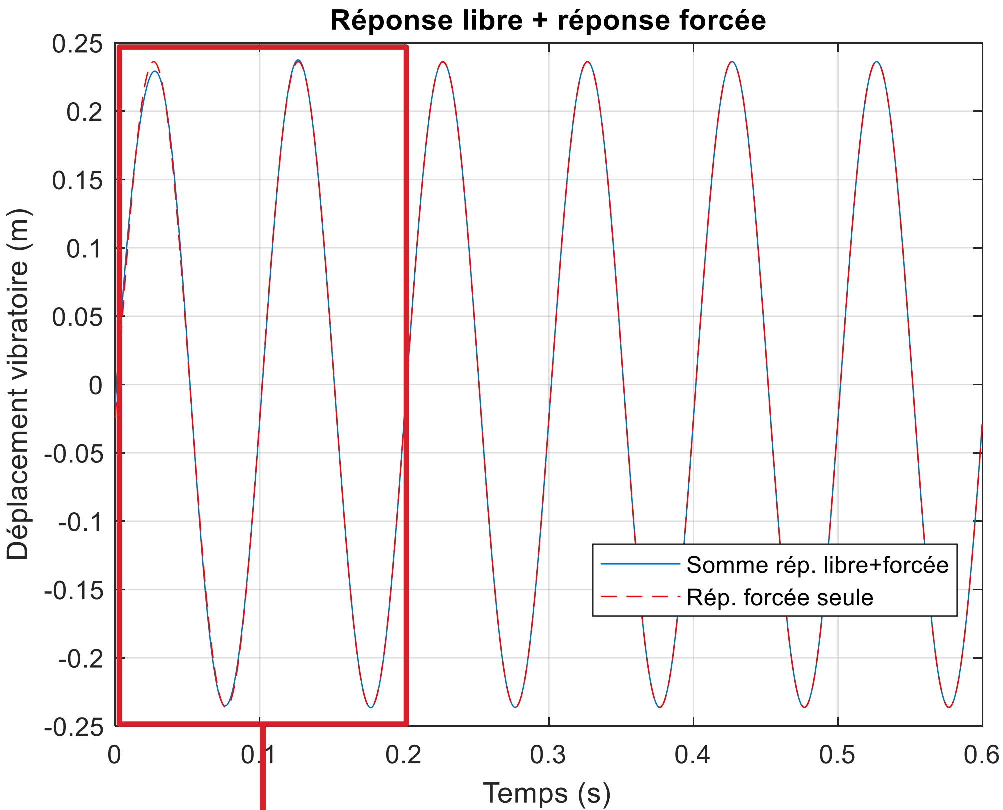
Déplacements vibratoires en fonction du temps

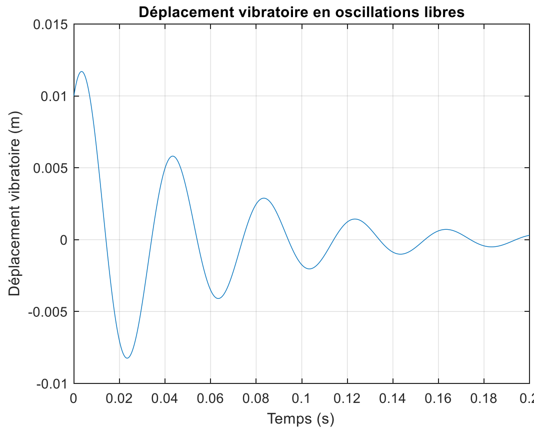
- Cas 2 : **Oscillations forcées**

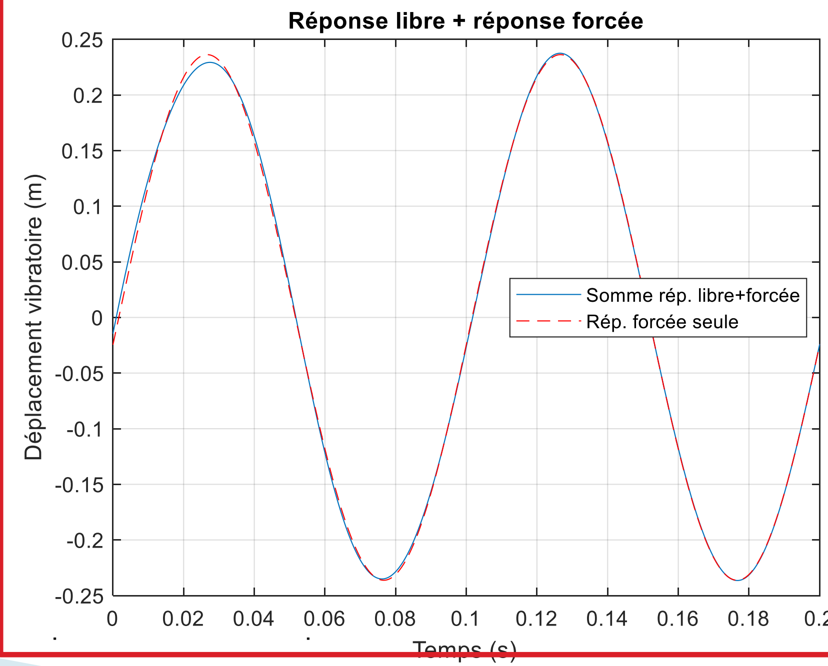


Déplacements vibratoires en fonction du temps

- Cas 2 : **Oscillations forcées – Régime transitoire / Régime permanent**







Régime transitoire : la réponse libre $\neq 0$
Régime permanent : dès que la réponse libre ≈ 0
(+/- vite selon amortissement)

ANNEXE

Solutions particulières des équations différentielles du second ordre avec second membre = excitation sinusoïdale simple

- **Voir tuto**

- Soit une équation différentielle du type $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$
- On traite ici le cas d'une excitation sinusoïdale simple, i.e. $f(t) = F sin(\Omega t)$
- Solutions particulière de l'équation différentielle ??
  - 2 cas de figure :
    - Oscillateur **conservatif** ($c = \xi = 0$) **et** $\boldsymbol{\Omega = \omega_0}$ (**excitation à la pulsation propre**) :

$$\boldsymbol{x^{forcée}(t) = t\big(Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)\big)} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

ou, de façon équivalente, $\boldsymbol{x^{forcée}(t) = t\, Xsin(\omega_0 t + \varphi)}$ avec $\mathrm{X}, \varphi \in \mathbb{R}$

    - **Tous les autres cas** :

$$\boldsymbol{x^{forcée}(t) = Acos(\Omega t) + Bsin(\Omega t)} \text{ avec } \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$$

ou, de façon équivalente, $\boldsymbol{x^{forcée}(t) = Xsin(\Omega t + \varphi)}$ avec $\mathrm{X}, \varphi \in \mathbb{R}$

En régime permanent, le **déplacement vibratoire est à la même pulsation/fréquence que la force excitatrice**