INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
HAUTS-DE-FRANCE

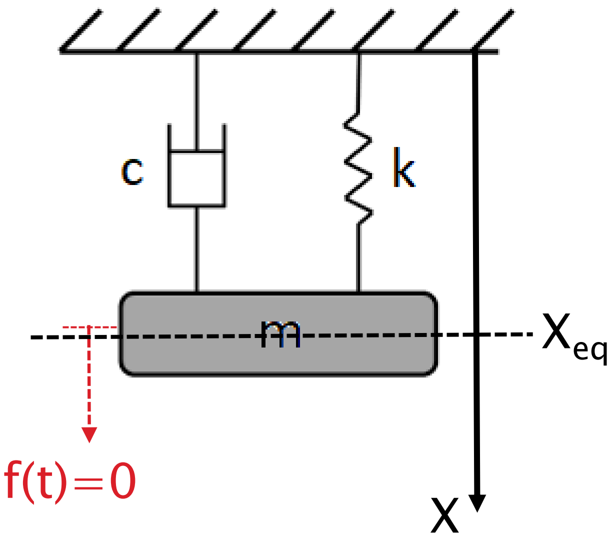
Chapitre 1

Systèmes à 1 degré de liberté en oscillations libres

1. Equation du déplacement vibratoire d'un oscillateur

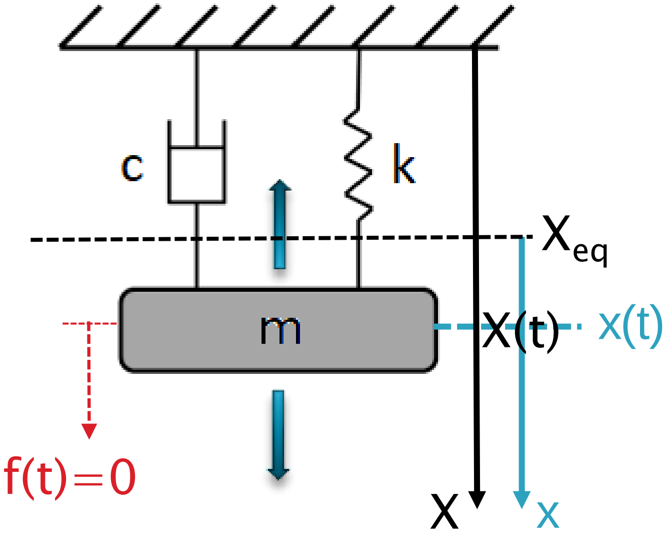
1.1. Système en translation

Soit une structure dont le comportement en vibration à 1ddl (selon l'axe X) peut être modélisé par le système masse/ressort/amortisseur suivant :



- Masse m, se déplaçant dans la direction X uniquement
- Ressort de raideur k (en N/m), de longueur à vide l_0
- Amortisseur visqueux de viscosité c (en Ns/m)
- Force excitatrice, f(t), <u>nulle en oscillations libres</u>

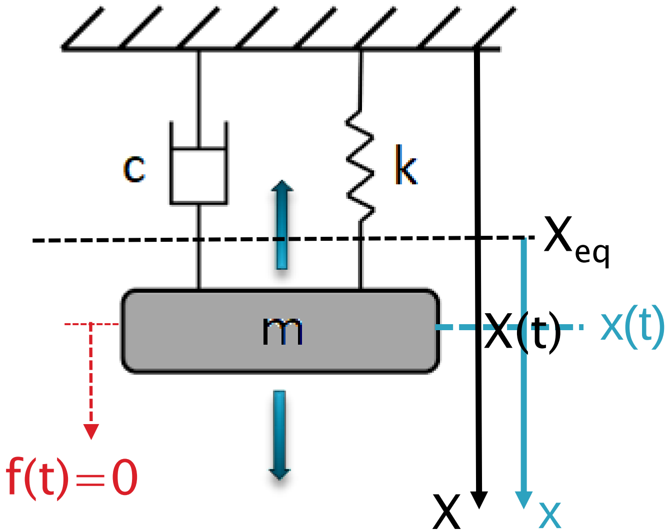
Chapitre 1 – Systèmes à 1 ddl en oscillations libres



- Avant de se mettre à osciller, la masse m est en position X_{eq} dans le repère global X (position à l'équilibre statique)
- Une action extérieure ponctuelle déclenche les **oscillations de la masse autour de sa position à l'équilibre statique**
- Le **déplacement vibratoire est x(t)**, c'est-à-dire le **déplacement de m autour de sa position d'équilibre statique**. Ainsi, $\mathbf{x(t) = X(t) - X_{eq}}$

C'est le déplacement vibratoire x(t) qui nous intéresse et que nous chercherons à déterminer

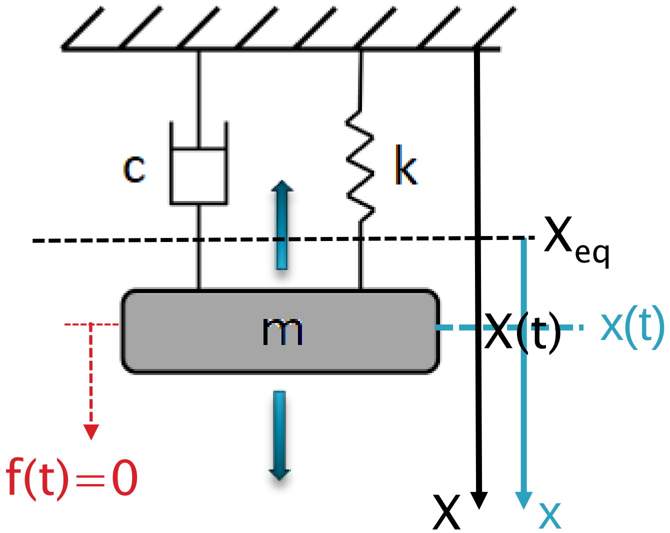
- Mise en équation du comportement vibratoire de l'oscillateur :
  => <u>Application du PFD</u>



- Bilan des efforts s'appliquant sur la masse m (en projection dans le repère global X) :

- PFD (projection selon X) :
- A l'équilibre statique, $X =$ et $\ddot{X} = \dot{X} =$, d'où :

- Mise en équation du comportement vibratoire de l'oscillateur :
  => Application du PFD



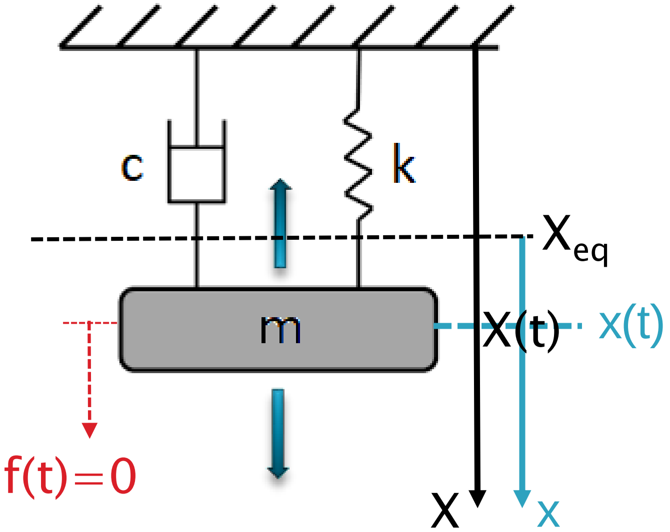
- Donc, $m\ddot{X}(t) = k\big(X_{eq} - X(t)\big) - c\dot{X}(t)$

- En rappelant que $x(t) = X(t) - X_{eq}$ et qu'alors $\dot{X}(t) = \dot{x}(t)$ et $\ddot{X}(t) = \ddot{x}(t)$, on aboutit à :

l'équation différentielle pour le déplacement vibratoire, $x(t)$:

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0}$$

- Remarque : on a montré que $mg = k\big(X_{eq} - l_0\big)$, ce qui donne $X_{eq} = \frac{mg}{k} + l_0$
- $\frac{mg}{k}$ est la déflection statique, c'est-à-dire l'allongement du ressort sous l'effet du poids de la masse m après son accrochage



Equation du comportement vibratoire de l'oscillateur :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

Erreur fréquente !

ATTENTION !

Le poids n'intervient pas dans l'équation différentielle pour le déplacement vibratoire $x(t)$

=> La contribution du poids est **déjà prise en compte** pour la détermination de l'équilibre statique et le **déplacement vibratoire est un déplacement autour de la position à l'équilibre statique**

1. Equation du déplacement vibratoire d'un oscillateur

1.2. Système en rotation : VOIR ANNEXE

1.3. Résolution des équations différentielles sans second membre

Equation différentielle pour le déplacement vibratoire en translation, x(t), en oscillations libres : $\boldsymbol{m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0}$

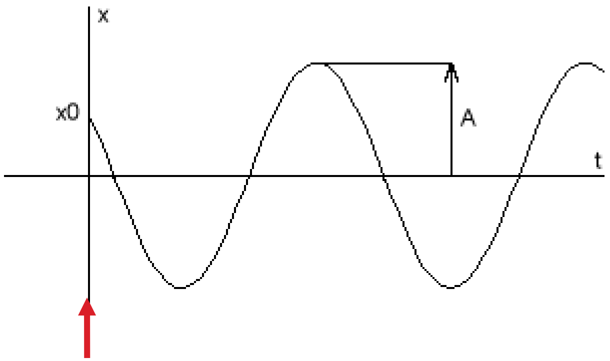
Pour déterminer x(t) il faut donc savoir résoudre une équation différentielle du second ordre, sans second membre dans le cas des oscillations libres.

Voir tuto !

*Rappel : « oscillations libres » signifie que la structure est mise en oscillations suite à une action ponctuelle dans le temps mais qu'aucune force excitatrice n'entretient les oscillations (d'où le second membre égal à 0 dans l'équation différentielle).

2. Oscillations <u>libres</u> d'un système <u>conservatif</u> (non amorti)

- Un oscillateur **conservatif** est un oscillateur **non amorti**, ce qui veut dire qu'une fois que la masse est mise en oscillations libres, **l'amplitude des oscillations ne diminue jamais**, mais reste constante jusqu'à « l'infini »



t_0 : évènement déclenchant les oscillations

- Un tel système n'existe pas dans la réalité, tous les oscillateurs étant dissipatifs, c'est-à-dire amortis (l'amplitude des vibrations finit par revenir à 0)
- L'étude du <u>système conservatif associé</u> à l'oscillateur réel permet toutefois d'exprimer un certain nombre de grandeurs caractéristiques, comme la **pulsation propre** ; sur un temps limité la **réponse conservative est aussi une bonne représentation de la réponse de systèmes faiblement amortis**, pour lesquels l'amplitude des vibrations diminue très lentement

2. Oscillations libres d'un système conservatif (non amorti)

BILAN

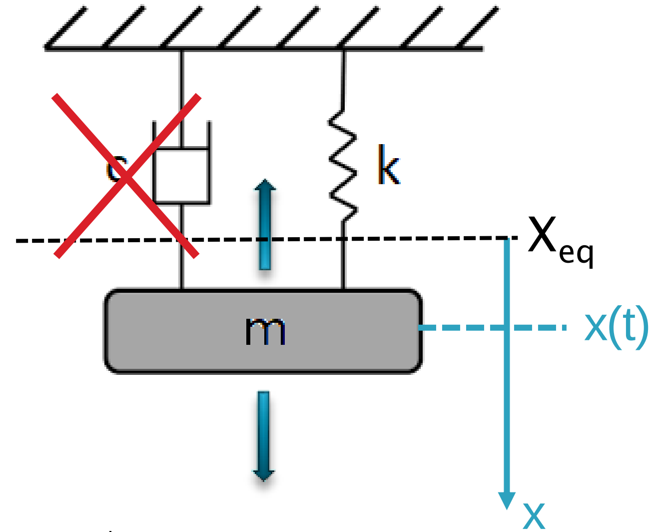
- Equation différentielle : $\boldsymbol{m\ddot{x}(t) + \cancel{c\dot{x}}(t) + kx(t) = 0}$

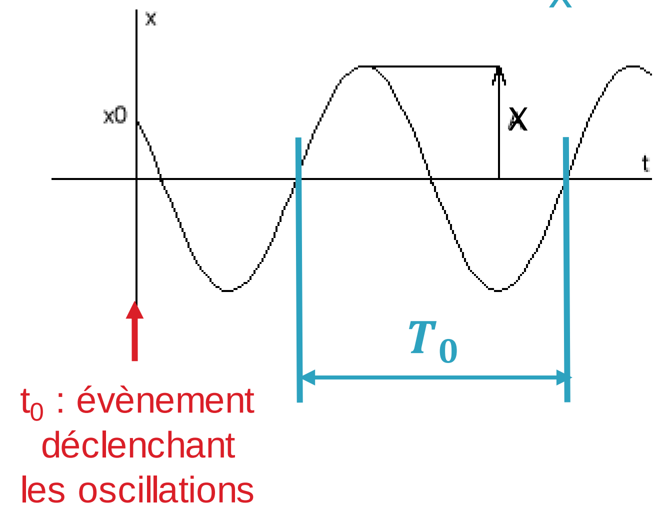
$$\Longrightarrow \boldsymbol{m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0}$$

- Ensemble des solutions réelles : $\boldsymbol{x(t) = X\sin(\omega_0 t + \varphi)}$
  - $\boldsymbol{\omega_0}$ **: pulsation propre du système conservatif,** $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ (en rad/s)
  - $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{\varphi}$: des constantes réelles (X : **amplitude** du déplacement vibratoire), déterminées en connaissant les conditions initiales

- On définit aussi :
  - $\boldsymbol{f_0}$ **: fréquence propre du système conservatif,** $\boldsymbol{f_0 = 2\pi/\omega_0}$ (en Hz)
  - $\boldsymbol{T_0}$ **: période propre du système conservatif (**$\boldsymbol{T_0 = 1/F_0}$**)**

- L'amplitude des oscillations (X) ne **décroît pas au cours du temps** pour un système **conservatif** (non amorti)





DEMONSTRATION

- Equation différentielle du déplacement vibratoire x(t), avec c=0 (amortissement nul) : $\boldsymbol{m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0}$
- Equation caractéristique associée : $mr^2 + kr = 0$, de discriminant $\Delta = -4km < 0$
- Solutions : $r_{1,2} = \pm j\frac{\sqrt{4km}}{2m} = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$
- Et donc l'équation différentielle admet comme solutions toutes les combinaisons telles que : $\boldsymbol{x(t) = Ae^{j\sqrt{k/m}t} + Be^{-j\sqrt{k/m}t}, A, B\epsilon\mathbb{C}}$
- Posons $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$, la **pulsation propre du système conservatif** {m,k} ; ω_0 s'exprime en rad/s
- Ensemble des solutions complexes admissibles pour le déplacement vibratoire, x(t) : $x(t) = Ae^{j\sqrt{k/m}t} + Be^{-j\sqrt{k/m}t}, A, B\epsilon\mathbb{C}$, ou encore : $\boldsymbol{x(t) = Ae^{j\omega_0 t} + Be^{-j\omega_0 t}}, A, B\epsilon\mathbb{C}$
- Autres expressions équivalentes (réelles) : $\boldsymbol{x(t) = A'cos(\omega_0 t) + B'sin(\omega_0 t)}$ ou

$$\boldsymbol{x(t) = Xsin(\omega_0 t + \varphi)}$$

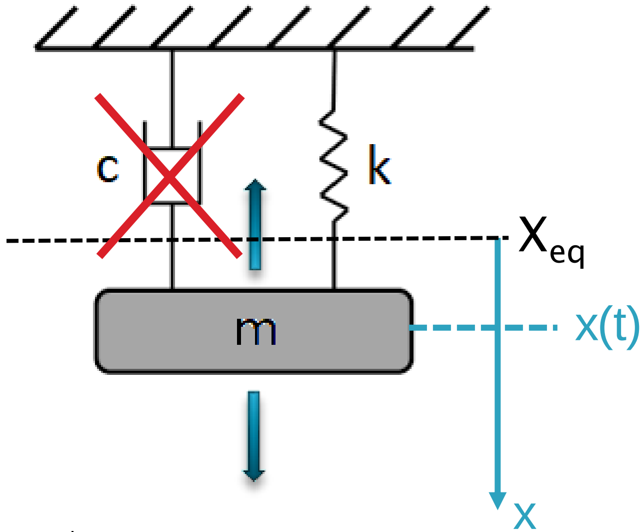
Avec $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{X} \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{A} = \frac{A' - jB'}{2}$, $\mathrm{B} = \frac{A' + jB'}{2}$ (ou $\mathrm{A}' = \mathrm{A} + B$ et $\mathrm{B}' = \mathrm{j}(\mathrm{A} - \mathrm{B})$) ou encore $\mathrm{A}' = \mathrm{X}\sin\varphi$, $\mathrm{B}' = \mathrm{X}\cos\varphi$ et $tan\varphi = \frac{A'}{B'}$

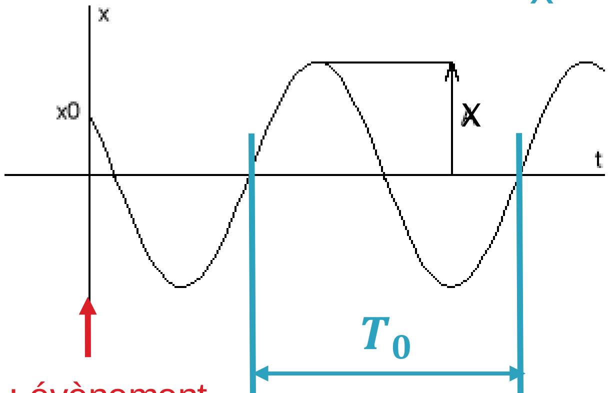
2. Oscillations libres d’un système conservatif (non amorti)

- Les constantes A, B, A’, B’ ou X se déterminent si on connait les conditions initiales
- Exemple : $\boldsymbol{x(t) = X sin(\omega_0 t + \varphi)}$ et $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = V_0$
- $x(t=0) = X sin(\varphi) = x_0$ et $\dot{x}(t) = X\omega_0 cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{x}(t=0) = X\omega_0 cos(\varphi) = V_0$

  Alors : $\boldsymbol{\tan(\varphi) = \frac{x_0}{X}\frac{X\omega_0}{V_0} = \frac{x_0\omega_0}{V_0}}$

  et $\mathbf{X} = \boldsymbol{\frac{x_0}{sin\left(arctan\left(\frac{x_0\omega_0}{V_0}\right)\right)}}$

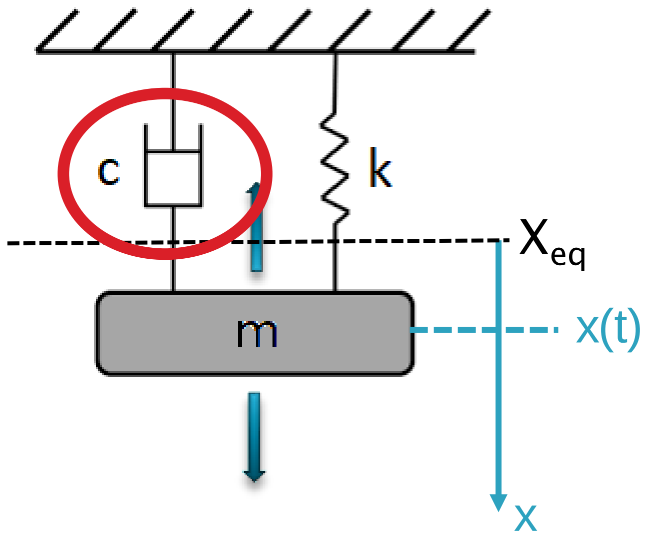


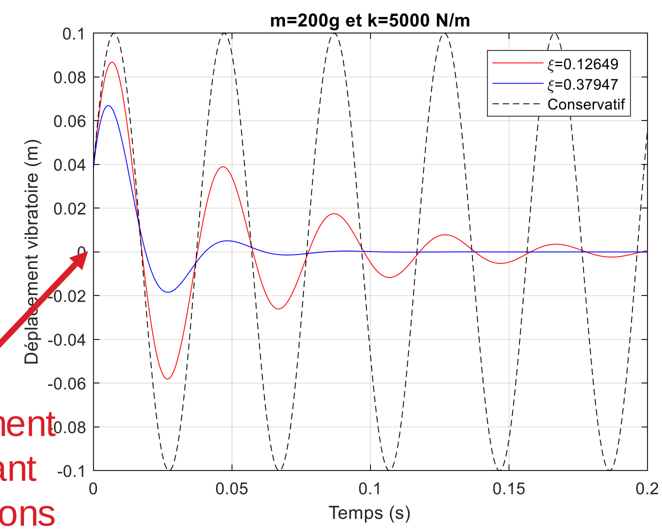


x(t) est alors complétement déterminé !

3. Oscillations libres d'un système dissipatif (amorti)

- Un oscillateur **dissipatif** est un oscillateur **amorti** :
  - L'amplitude des vibrations au cours du temps
  - La décroissance dépend des caractéristiques de l'oscillateur : **plus l'amortissement est important, plus la décroissance de l'amplitude est rapide** (autrement dit, plus les oscillations s'arrêtent rapidement et plus vite le système retrouve sa position au repos)
- Dans la réalité, tous les systèmes sont amortis



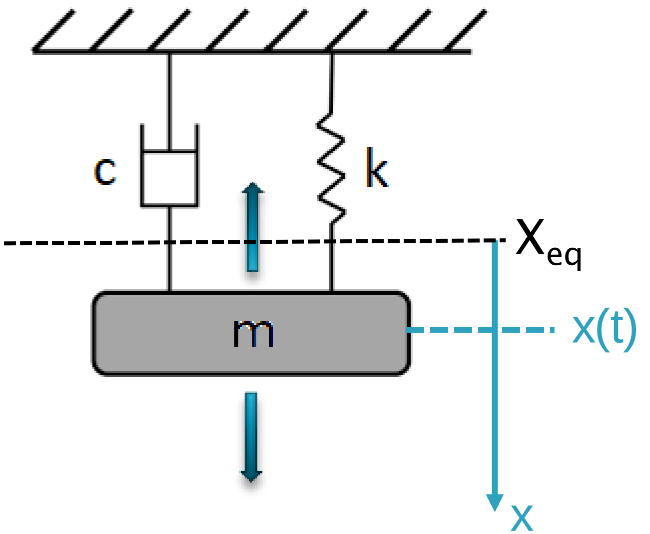


t_0 : évènement déclenchant les oscillations

3. Oscillations libres d'un système dissipatif (amorti)

- Equation différentielle (on réintroduit l'amortisseur, second membre nul car pas de force excitatrice) :

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0}$$



- Equation caractéristique : $mr^2 + cr + k = 0$, de discriminant $\Delta = c^2 - 4km$
- Selon le signe de Δ, on définit différentes natures d'amortissement :
  - $\Delta > 0$: amortissement sur-critique (pas d'oscillation)
  - $\Delta = 0$: amortissement critique (pas d'oscillation)
  - **$\Delta < 0$: amortissement sous critique => oscillations**

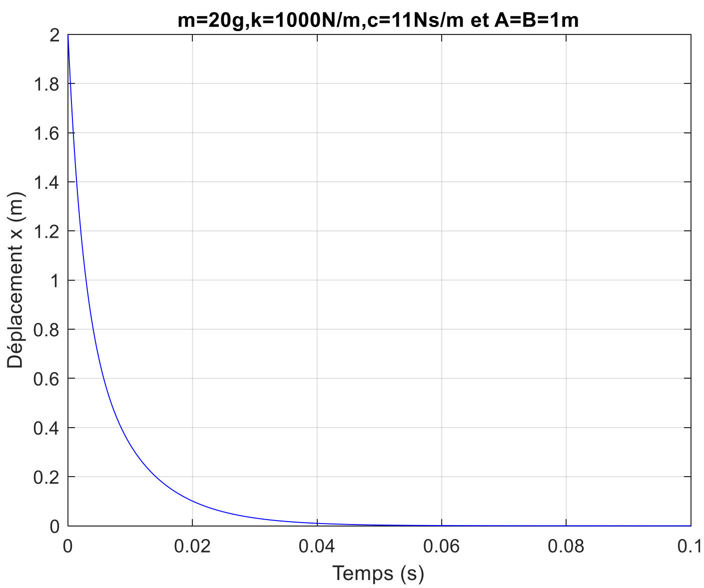
3. Oscillations libres d'un système dissipatif (amorti)

3.1. Amortissement sur-critique (ou hyper-critique) - Δ> 0

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique $mr^2 + cr + k = 0$ admet 2 racines réelles indépendantes, r_1 et r_2, telles que $r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$

- Les solutions réelles de l'équation différentielle sont alors données par l'ensemble des combinaisons $\boldsymbol{x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$ $(\boldsymbol{A}, \mathbf{B}\ \epsilon\ \mathbb{R})$

⇒ Le système n'oscille pas



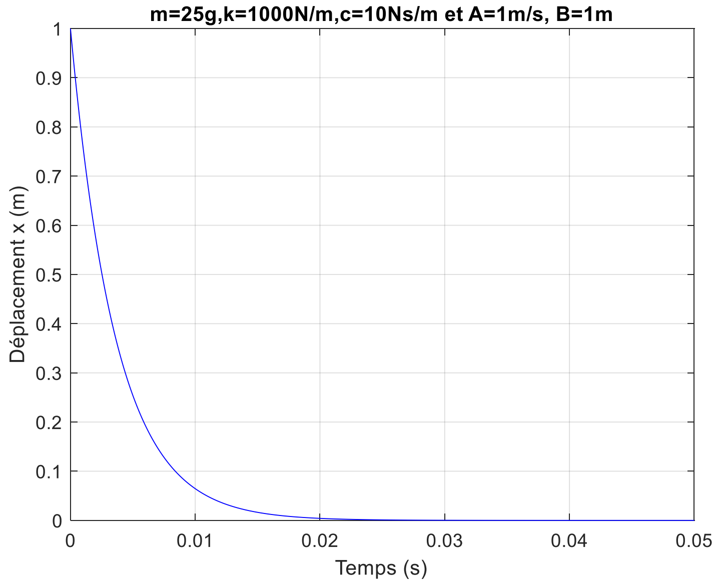
3. Oscillations libres d'un système dissipatif (amorti)

3.2. Amortissement critique - $\Delta = 0$

- Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire $c = 2\sqrt{km}$, l'équation caractéristique $mr^2 + cr + k = 0$ admet 1 racine « double », $\mathrm{r} = \frac{-c}{2m}$

- Les solutions réelles de l'équation différentielle sont alors données par l'ensemble des combinaisons $\boldsymbol{x(t) = (At + B)e^{rt}}$ $\boldsymbol{(A, \mathrm{B} \in \mathbb{R})}$

⇒ Le système n'oscille pas

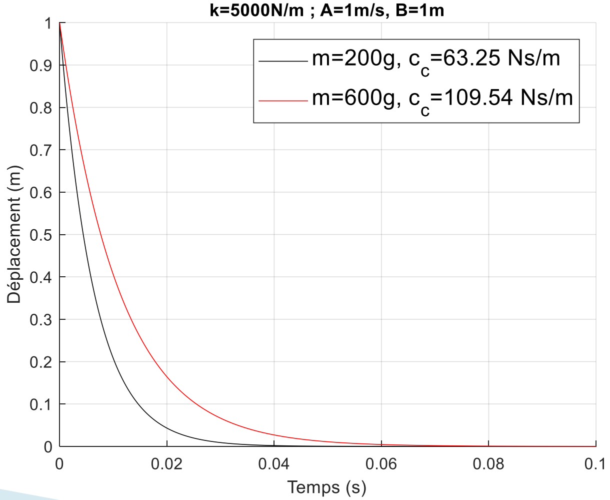


3. Oscillations libres d'un système dissipatif (amorti)

3.2. Amortissement critique - $\Delta = 0$

- Le cas $\Delta = 0$ permet de définir la **viscosité critique**, $c_c = 2\sqrt{km}$, ou encore $c_c = 2m\omega_0$ (avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$) : **le système oscille ssi c < c_c**

- On peut remarquer que $\mathrm{r} = \frac{-c_c}{2m} = -\omega_0$; si on pose $\boldsymbol{\tau} = {}^{1}/_{\omega_0}$, le temps caractéristique de « l'oscillateur » critique, alors $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{At} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{e}^{-t/\tau}$ $(A, \mathrm{B} \in \mathbb{R})$
Plus τ augmente (plus ω_0 diminue), plus le retour à l'équilibre (i.e. $x = 0$) est lent



3. Oscillations libres d'un système dissipatif (amorti)

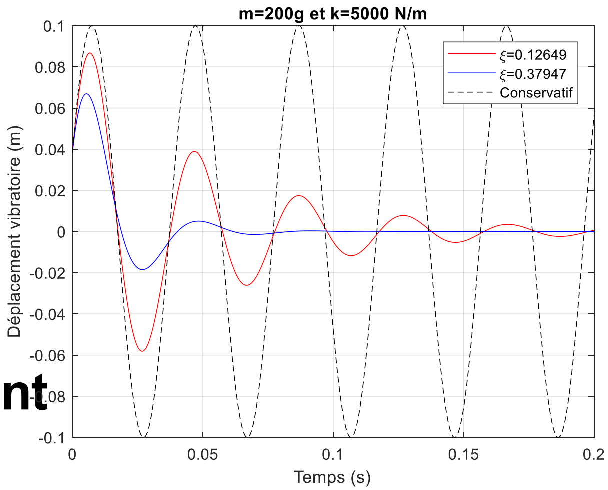
3.3. Amortissement sous-critique (ou hypo-critique) - $\Delta < 0$

- **Seul régime d'amortissement conduisant à des oscillations** du système autour de sa position à l'équilibre statique

- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique $mr^2 + cr + k = 0$ admet 2 racines complexes, $r_{1,2} = \frac{-c \pm j\sqrt{4km - c^2}}{2m}$
- On définit le **taux d'amortissement** (ou facteur d'amortissement) :

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_0}$$

(c_c est la viscosité critique définie juste avant)



- **Plus ξ est faible, plus l'amortissement des oscillations, c'est-à-dire l'annulation de x et le retour à la position d'équilibre statique, est lent**

3. Oscillations libres d'un système dissipatif (amorti)

3.3. Amortissement sous-critique (ou hypo-critique) - $\Delta < 0$

- L'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle est donné par :

$$\boxed{x(t) = Xe^{-\xi\omega_0 t} sin(\omega_1 t + \varphi) \text{ avec } X, \varphi \in \mathbb{R}}$$

- On définit :
  - **La pulsation naturelle,** $\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$
  - **La fréquence naturelle,** $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$
  - **La pseudo-période,** $T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}$

DEMONSTRATION - Déplacement vibratoire d'un oscillateur amorti en oscillations libres

- Equation différentielle : $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$
- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique $mr^2 + cr + k = 0$ admet 2 racines complexes, $r_{1,2} = \frac{-c \pm j\sqrt{4km - c^2}}{2m}$
- Avec $\frac{c}{2m} = \xi\omega_0$ et $\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2\omega_0^2} = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$, on aboutit à $\boldsymbol{r_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$
- L'ensemble des solutions <u>complexes</u> de l'équation différentielle est alors donné par les combinaisons $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, soit :

$$\boldsymbol{x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(Ae^{j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t} + Be^{-j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t}\right) \quad (A, B \in \mathbb{C})}$$

- En introduisant **la pulsation naturelle,** $\boldsymbol{\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$, l'ensemble des solutions <u>complexes</u> est donné par :

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(Ae^{j\omega_1 t} + Be^{-j\omega_1 t}\right) \quad (A, B \in \mathbb{C})}}$$

DEMONSTRATION - Déplacement vibratoire d'un oscillateur amorti en oscillations libres

- $x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(Ae^{j\omega_1 t} + Be^{-j\omega_1 t}\right)$ peut aussi s'écrire
  $x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}(A[\cos(\omega_1 t) + jsin(\omega_1 t)] + B[\cos(\omega_1 t) - jsin(\omega_1 t)])$
  $\Longrightarrow x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}(A' \cos(\omega_1 t) + B' sin(\omega_1 t))$ avec $A' = A + B$ et $B' = j(A - B)$

- L'ensemble des solutions réelles est donc donné par :

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}(A' \cos(\omega_1 t) + B' \sin(\omega_1 t))} \textbf{ avec } \boldsymbol{A', B' \epsilon\ \mathbb{R}}}$$

Remarque : $A', B' \epsilon\ \mathbb{R}$ ssi A et B sont des complexes conjugués (alors $A' = 2\mathcal{R}e(A)$ et $B' = -2\Im m(A)$)

- Autre expression équivalente (et plus pratique !):

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = Xe^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_1 t + \varphi)} \textbf{ avec } \boldsymbol{X, \varphi\ \epsilon\ \mathbb{R}}}$$

Avec $X = \sqrt{A'^2 + B'^2}$ et $\tan\varphi = \frac{A\prime}{B\prime}$

3. Oscillations libres d'un système dissipatif (amorti)

3.3. Amortissement sous-critique (ou hypo-critique) - Δ< 0

- Ensemble des solutions réelles : $\boldsymbol{x(t) = Xe^{-\xi\omega_0 t} sin(\omega_1 t + \varphi)}$ avec $X, \varphi \in \mathbb{R}$

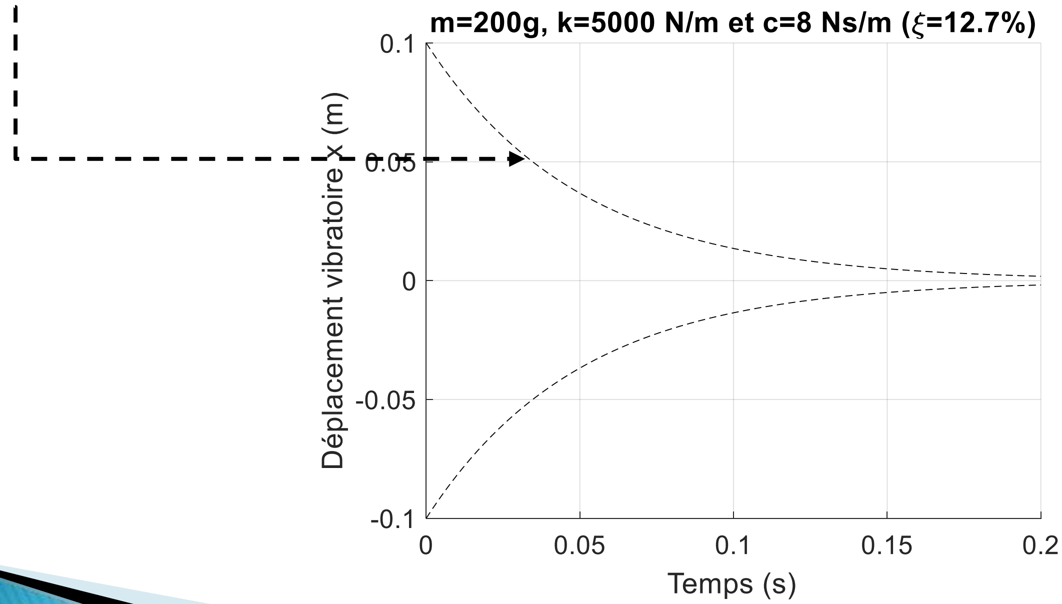
- $x(t)$ peut être complétement déterminé si on connait les conditions initiales, par ex : $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = V_0$
Alors $x(t=0) = Xsin(\varphi) = x_0$ et
$\dot{x}(t) = X\left[-\xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t} sin(\omega_1 t + \varphi) + e^{-\xi\omega_0 t}\omega_1 cos(\omega_1 t + \varphi)\right]$, soit $\dot{x}(t=0) = X[-\xi\omega_0 sin(\varphi) + \omega_1 cos(\varphi)] = V_0$ et donc $Xsin(\varphi)\left[-\xi\omega_0 + \frac{\omega_1}{tan(\varphi)}\right] = V_0 \Longrightarrow$
$x_0\left[-\xi\omega_0 + \frac{\omega_1}{tan(\varphi)}\right] = V_0$

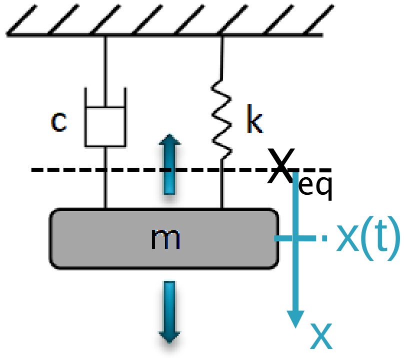
On en déduit : $\boldsymbol{\tan(\varphi) = \frac{\omega_1 x_0}{V_0 + \xi\omega_0 x_0}}$ et donc $\boldsymbol{X = \frac{x_0}{sin\left(arctan\left(\frac{\omega_1 x_0}{V_0 + \xi\omega_0 x_0}\right)\right)}}$

3. Oscillations libres d'un système dissipatif (amorti)

3.3. Amortissement sous-critique (ou hypo-critique) - Δ< 0

- Allure de $x(t) = Xe^{-\xi\omega_0 t}sin(\omega_1 t + \varphi)$ avec $X, \varphi \epsilon \mathbb{R}$?
- Les oscillations sont **amorties** :
  - **l'amplitude du déplacement vibratoire x diminue avec le temps**
  - La décroissance de l'amplitude est donnée par **la courbe enveloppe** $\pm \boldsymbol{Xe^{-\xi\omega_0 t}}$

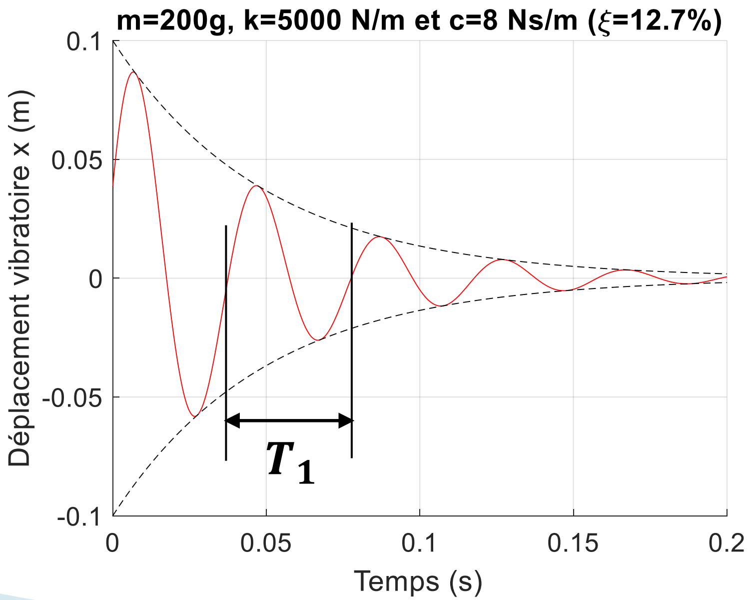


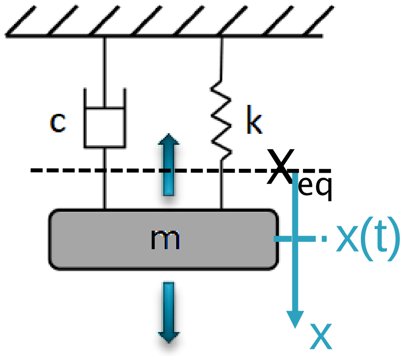


3. Oscillations libres d'un système dissipatif (amorti)

3.3. Amortissement sous-critique (ou hypo-critique) - $\Delta < 0$

- Allure de $x(t) = Xe^{-\xi\omega_0 t} sin(\omega_1 t + \varphi)$ avec $X, \varphi \epsilon \mathbb{R}$?
- On parle d'**oscillations pseudo-périodiques** :
  - L'amplitude n'étant pas constante, on ne peut pas parler d'évolution périodique à proprement parler
  - Les oscillations sont donc qualifiées de pseudo-périodiques, à la **pseudo-période $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$**





3. Oscillations libres d'un système dissipatif (amorti)

3.3. Amortissement sous-critique (ou hypo-critique) - Δ< 0

- Notion de **décrément logarithmique**

$$\boldsymbol{\delta = \frac{1}{n} ln\left(\frac{x(t)}{x(t+nT_1)}\right)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

- D'après l'expression de $x(t) = Xe^{-\xi\omega_0 t} sin(\omega_1 t + \varphi)$ et en remarquant que $\omega_1 T_1 = 2\pi)$: $\delta = \frac{1}{n} ln\left(\frac{Xe^{-\xi\omega_0 t} sin(\omega_1 t+\varphi)}{Xe^{-\xi\omega_0 (t+nT_1)} sin(\omega_1 (t+nT_1)+\varphi)}\right) = \frac{1}{n} ln\left(e^{\xi\omega_0 nT_1}\right)$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\delta = \xi\omega_0 T_1}$$

- En rappelant que $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$, on obtient une autre expression pour le décrément logarithmique :

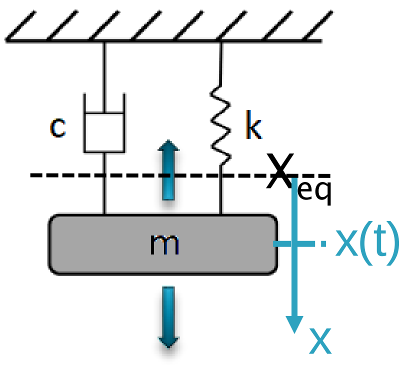
$$\boldsymbol{\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Remarque : pour un système faiblement amorti : $\boldsymbol{\xi \ll 1}$ et $\boldsymbol{\delta \approx 2\pi\xi}$

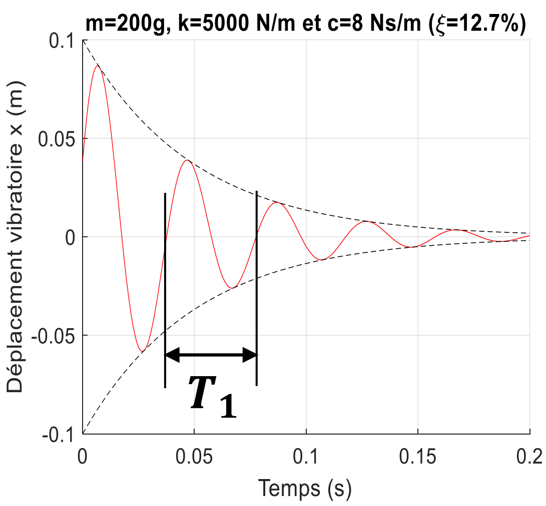
On verra en TD que le décrément logarithmique est un outil très pratique pour identifier les paramètres m, k, c d'un oscillateur

BILAN : oscillations libres d'un système dissipatif (amortissement sous-critique)

- Equation différentielle : $\boldsymbol{m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0}$
- Ensemble des solutions réelles :
  $\boldsymbol{x(t) = Xe^{-\xi\omega_0 t}sin(\omega_1 t + \varphi)}$ **avec** $\boldsymbol{X, \varphi \in \mathbb{R}}$



- On définit :
  - Le **taux d'amortissement** (ou facteur d'amortissement) :
    $\boldsymbol{\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_0}}$
  - La **pulsation naturelle,** $\boldsymbol{\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$**, la fréquence naturelle,** $\boldsymbol{f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}}$, et **la pseudo-période** $\boldsymbol{T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}}$ (on parle d'oscillations pseudo-périodiques)

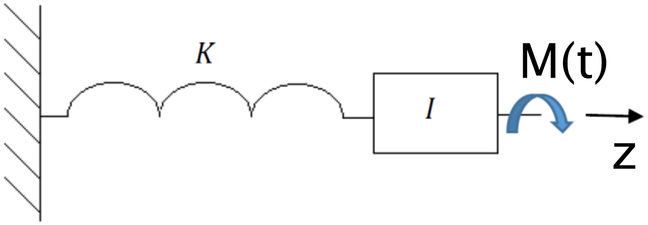


- Les oscillations sont **amorties** :
  - **l'amplitude du déplacement vibratoire x diminue avec le temps**
  - La décroissance de l'amplitude est donnée par **la courbe enveloppe** $\boldsymbol{\pm Xe^{-\xi\omega_0 t}}$
- La mesure du décrément logarithmique permet de calculer le taux d'amortissement

Chapitre 1 – 1.2 Système en rotation

On peut retrouver une équation différentielle analogue à celle obtenue pour un système en translation, pour le cas d'une masse en rotation.

Soit une structure dont le comportement en vibration à 1ddl (rotation autour de l'axe z) peut être modélisé par le système masse/ressort de torsion/frein suivant :



- Masse tournante m autour de son axe z, de moment d'inertie I
- Ressort de torsion, de raideur K (en Nm/rad), de position initiale α_0
- Frein de type visqueux de viscosité c (en Nms/rad)
- Couple excitateur, M(t), nul en oscillations libres

Chapitre 1 – 1.2 Système en rotation

- Bilan des actions extérieures sur M (couples autour de l'axe z) :
  - Couple résistant du ressort de torsion : $C_R = -K(\alpha(t) - \alpha_0)$, avec α_0 l'angle « au repos »
  - Couple de freinage : $C_F = -C\dot{\alpha}(t)$
  - Couple excitateur M(t), nul en oscillations libres mais conservé ici pour avoir une expression générale

- Théorème des moments dynamiques : $\boldsymbol{I\ddot{\alpha}(t) = -K(\alpha(t) - \alpha_0) - C\dot{\alpha}(t) + M(t)}$
- A l'équilibre statique : $0 = -K\left(\alpha_{eq} - \alpha_0\right) \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{eq} = \alpha_0}$
- Sachant que $I = mr^2$, avec r le rayon de giration, on peut aussi écrire : $mr\ddot{\alpha} + \frac{K}{r}\left(\alpha(t) - \alpha_{eq}\right) + \frac{C}{r}\dot{\alpha}(t) = \frac{M(t)}{r}$
- Pour trouver une analogie avec le système en translation, on pose $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{r}\left(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{\alpha_{eq}}\right)$, alors $\dot{x}(t) = r\dot{\alpha}(t)$ et $\ddot{x}(t) = r\ddot{\alpha}(t)$ et :

$$\boldsymbol{m\ddot{x}(t) + \frac{C}{r^2}\dot{x}(t) + \frac{K}{r^2}x(t) = \frac{M(t)}{r}}$$

Chapitre 1 – 1.2 Système en rotation

- Pour un système en rotation on a donc l'équation différentielle

$$\boldsymbol{m\ddot{x}(t) + \frac{C}{r^2}\dot{x}(t) + \frac{K}{r^2}x(t) = \frac{M(t)}{r}} \text{ avec } \mathbf{x(t) = r\big(\alpha(t) - \alpha_{eq}\big)}$$

- Faisons l'analogie avec un système en translation :

	Translation	**Rotation**
Equation différentielle	$m\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$	$m\ddot{x}(t) + \frac{C}{r^2}\dot{x}(t) + \frac{K}{r^2}x(t) = \frac{M(t)}{r}$
ddl	Déplacement vibratoire x(t)	Angle de rotation vibratoire $\alpha(t) - \alpha_{eq}$ et $\mathrm{x}(t) = \mathrm{r}\big(\alpha(t) - \alpha_{eq}\big)$
« Ressort »	Ressort de traction/compression, raideur k (N/m)	Ressort de torsion, raideur K (Nm/rad) => $\boldsymbol{\frac{K}{r^2}}$ dans l'équa. diff
« Amortisseur »	Amortisseur visqueux, viscosité c (Ns/m)	Frein, viscosité C (Nms/rad) => $\boldsymbol{\frac{C}{r^2}}$ dans l'équa. diff.
Excitation	Force excitatrice, f(t)	Couple excitateur, M(t) =>$\boldsymbol{\frac{M(t)}{r}}$ dans l'équa. diff.

On résoudra les équations différentielles pour un système en translation et **les résultats pour un système en rotation seront <u>les mêmes</u> en appliquant cette <u>analogie</u>**