INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES HAUTS-DE-FRANCE

FISA GI 4A

Bruits et **Vibrations**

Delphine Notta-Cuvier
delphine.notta@uphf.fr
Bâtiment CISIT

Introduction

- Intérêt de l'étude vibratoire des structures ?

  - Comprendre la **réponse d'une structure face à une sollicitation en vibratoire**
    - **Réponse libre ou forcée**
    - Notion de **résonance**

      https://www.youtube.com/watch?v=NbrgbQIgi18

  - **Concevoir** des structures allégées, optimisées, machines tournantes complexes… dont les qualités intrinsèques leur permettront de **ne pas entrer en résonance** sous l'effet des sollicitations extérieures (oscillations forcées) ou sous le simple fait de leur mise en fonctionnement (oscillations libres)

    - Eviter les situations comme celles du pont de Takoma *https://www.youtube.com/watch?v=Rmfl2kFeNPM*

    - Savoir **corriger** une conception pour éviter la résonance *https://www.youtube.com/watch?v=pMr1MzSv044*

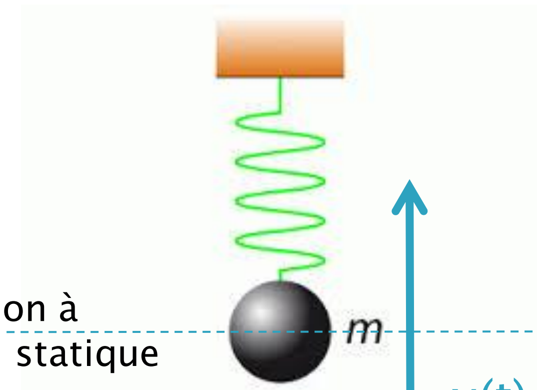
Introduction – 1/ Vocabulaire, concepts

- Vibrations/oscillations : déplacement **autour d'une position atteinte à l'équilibre statique**

- Pourquoi une structure oscille ?
  - Oscillations **libres** : la structure se met à osciller après qu'une **action extérieure ponctuelle** ait provoquée sa mise en mouvement (à t_0). **Il n'y a plus d'action extérieure après t_0**.

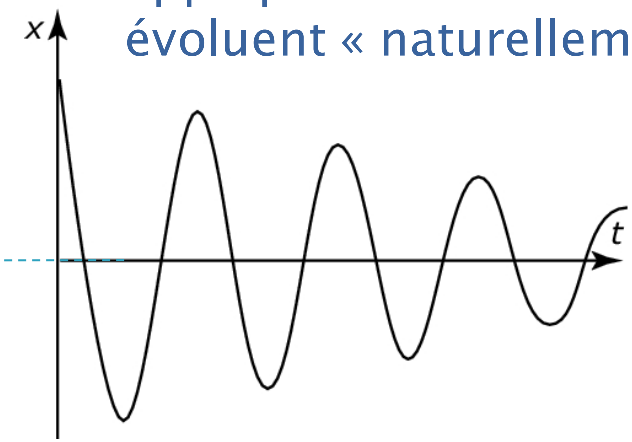
Illustration : oscillations libres

Position à
l'équilibre statique



x(t)
Déplacement
vibratoire
**autour de la
position
d'équilibre**

Après t0 : aucun effort
appliqué : les oscillations
évoluent « naturellement »



A t0 : on force la
mise en oscillation
(par ex. en tirant sur
la masse)

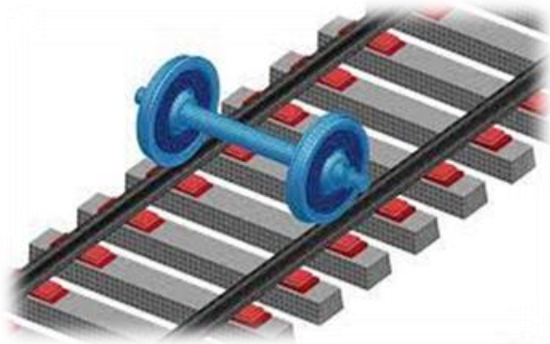
Introduction – 1/ Vocabulaire, concepts

- Vibrations/oscillations : déplacement **autour d'une position atteinte à l'équilibre statique**

- Pourquoi une structure oscille ?
  - Oscillations **libres** : la structure se met à osciller après qu'une action extérieure ponctuelle ait provoquée sa mise en mouvement (à t_0).
    Il n'y a plus d'action extérieure après t_0.
    - **Les caractéristiques du mouvement vibratoire sont déterminées par les propriétés intrinsèques de la structure**
    - En présence d'**amortissement** les oscillations cessent au bout d'un temps caractéristique propre à la structure.

Introduction – 1/ Vocabulaire, concepts

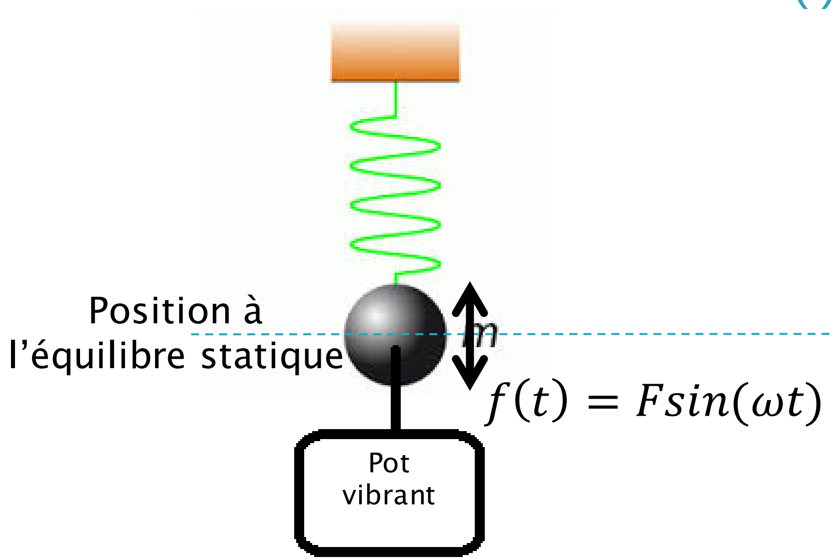
- Oscillations **forcées** : les **vibrations sont provoquées et entretenues par une action extérieure**.

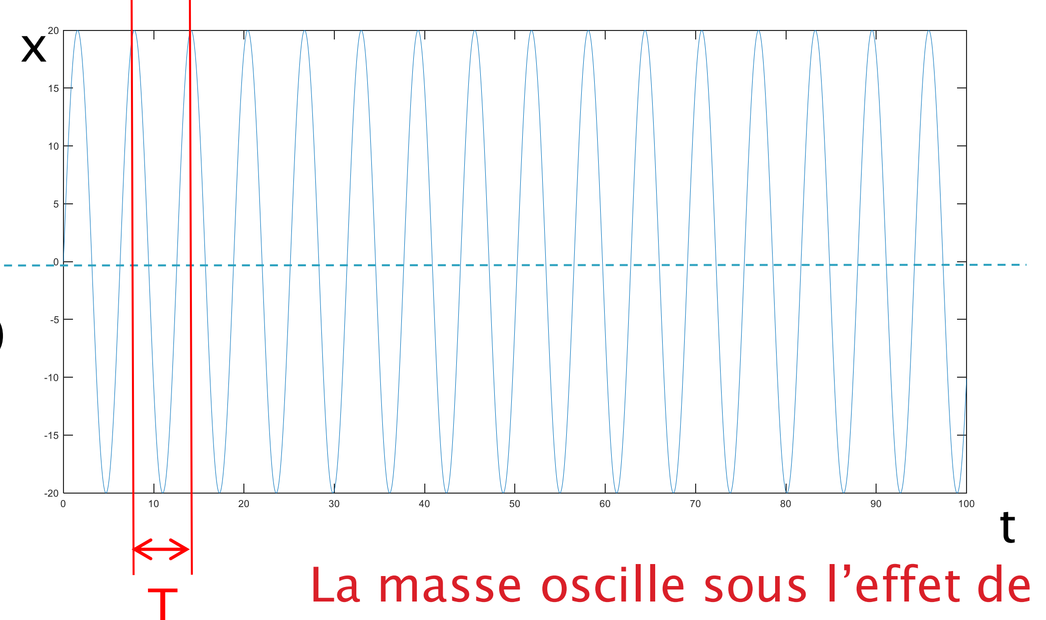


- Les caractéristiques du mouvement vibratoire sont déterminées **par les propriétés de la structure et par celles de la force excitatrice**. On distinguera un régime transitoire et un régime permanent.

Illustration : oscillations forcées

x(t) : Déplacement vibratoire **autour de la position d'équilibre statique (régime permanent)**





Après t0 : les oscillations sont entretenues par l'application de la force excitatrice

La masse oscille sous l'effet de la force

Le déplacement vibratoire a la même pulsation/fréquence que la force excitatrice

Période, $T = 1/freq$
($freq$: fréquence de la force excitatrice)
Pulsation, $\omega = 2\pi * freq \Rightarrow \omega = 2\pi/T$

Introduction – 1/ Vocabulaire, concepts

- Comment évoluent les oscillations au cours du temps ?

  Deux natures de système :

  - Système **conservatif** : non amorti

    En oscillations libres : le système continuera à osciller jusqu'à l'∞, en conservant la même amplitude du déplacement vibratoire

  - Système **dissipatif** : amorti (tous les systèmes réels sont amortis)

    En oscillations libres : décroissance progressive de l'amplitude des oscillations jusqu'à ce qu'elles cessent

    La loi de décroissance dépend des caractéristiques du système

- Remarque : oscillations forcées

  En régime permanent, l'amplitude des oscillations est pilotée par la force excitatrice : elle reste identique tant que la force excitatrice n'est pas modifiée

Introduction – 1/ Vocabulaire, concepts

- Périodicité de la réponse
  - En fonction des caractéristiques du système, sa réponse a une excitation n'est pas forcément périodique
  - Toutefois, on parlera de vibrations/oscillations uniquement pour des réponses périodiques ou pseudo-périodiques pour lesquelles il existe une/des fréquence(s) pouvant caractériser les oscillations

    C'est/ce sont la/les **fréquence(s) propre(s)** d'une structure ; leur valeur dépend des caractéristiques de la structure

- Notion de résonance
  - Une structure entre en résonance s'il y a **correspondance entre la fréquence de la force excitatrice et une des fréquences propres de la structure**
  - La résonance se traduit par un déplacement vibratoire extrêmement amplifié, conduisant souvent à la ruine de la structure.

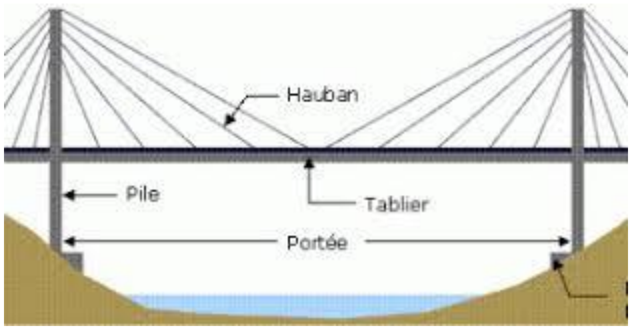
Introduction – 2/ Modélisation

- Pour calculer la réponse vibratoire d'une structure, il faut <u>modéliser son comportement sous forme d'un système oscillant</u>
- Différentes approches :
  - **Systèmes discrets** : les masses sont concentrées en un point
  - Systèmes continus : les masses sont réparties
  - Systèmes discrétisés à partir de système continus : modèles éléments finis, e.g.
- Principes généraux :
  - Identifier le <u>nombre de degrés de liberté</u> : nombre de coordonnées <u>indépendantes</u> nécessaires pour déterminer exactement les positions de toutes les masses d'un système discret ou discrétisé

    Dans ce cours : 1 ddl (2 ddl abordés en fin de cours)

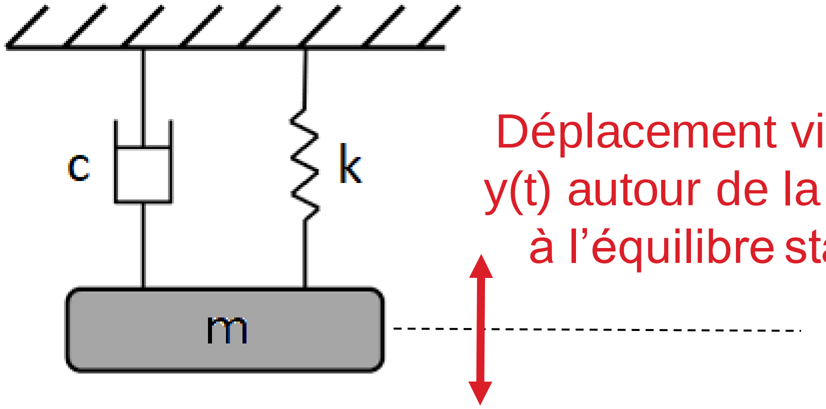
Introduction – 2/ Modélisation

- Nombre de ddl ? Dépend aussi de ce que l'on souhaite calculer



Tablier : nombreux ddl
Mais si on s'intéresse uniquement aux vibrations verticales (selon y)
=> **1 seul ddl** (y(t))

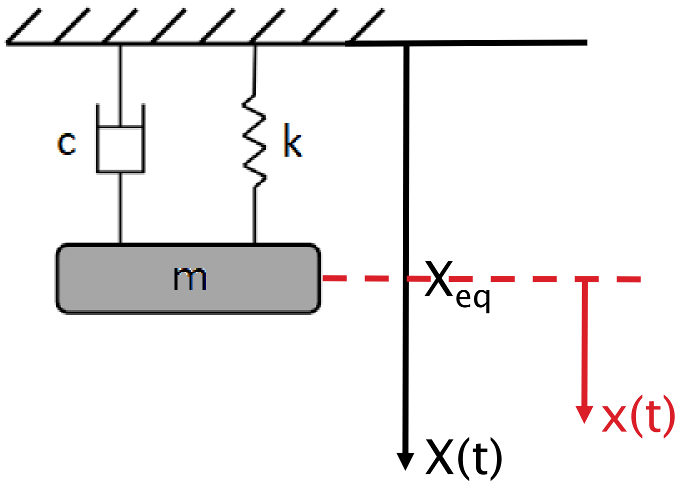
Modélisation à 1 ddl ok !



Introduction – 2/ Modélisation

- Principes généraux (suite) :
  - **Identifier** tous les paramètres m1, m2, … mn, k1, k2, kn, c1, c2, cn du système : par mesures expérimentales et/ou simulations numériques
  - Savoir **exprimer la réponse vibratoire de ce système en oscillations libres ou forcées**

- On considère un système (oscillateur) à un degré de liberté selon l'axe x
  - Le déplacement vibratoire est entièrement connu si on connait x(t)
- On modélise un oscillateur par un **système masse – ressort – amortisseur** :
  - Masse m : masse de la structure à modéliser, concentrée en un point
  - Ressort de raideur k (en N/m) : il modélise l'oscillation en ramenant la masse vers sa position à l'équilibre
  - Amortisseur de viscosité c (en Ns/m) : il modélise l'amortissement par un modèle de fluide visqueux
- Expression du déplacement vibratoire : **attention au repère** !



Position de la masse m dans le **repère global : X(t)**

Avant d'osciller, la masse a une **position d'équilibre repérée par X_{eq} dans le repère global**

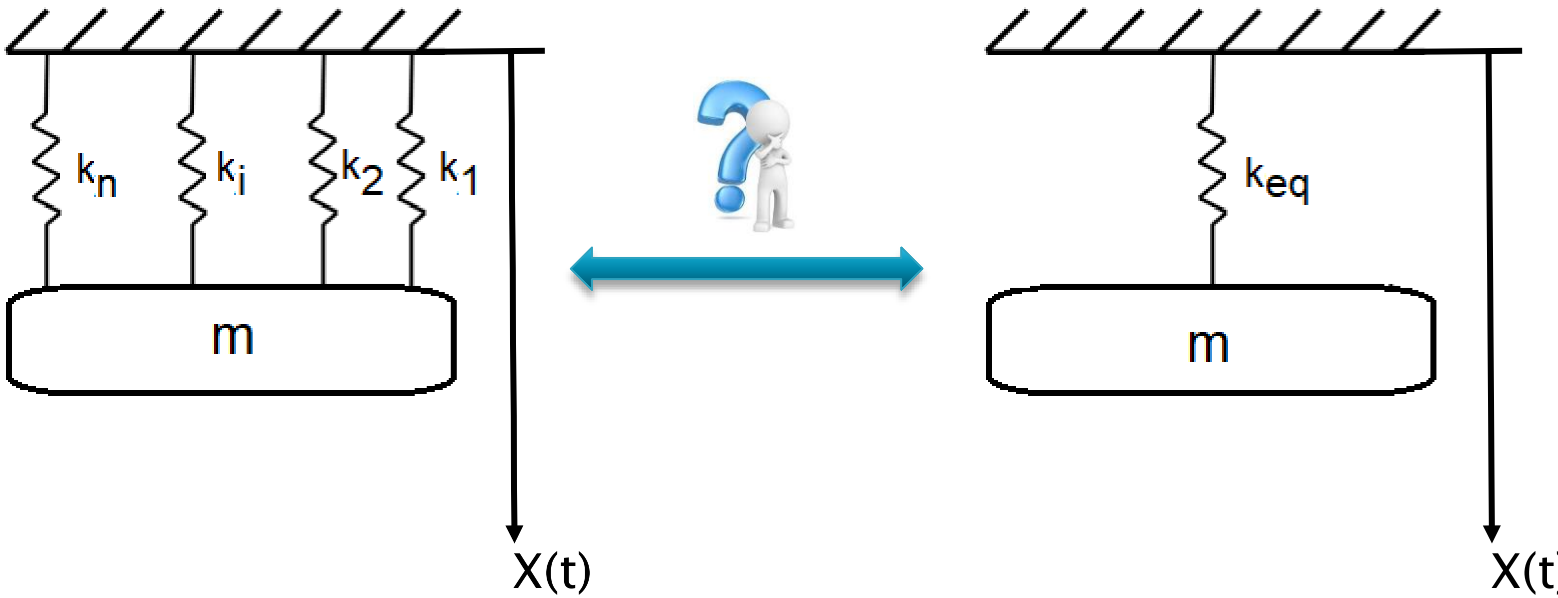
Le **déplacement vibratoire x(t)** est le **déplacement de m autour de sa position d'équilibre**, tel que **$x(t) = X(t) - X_{eq}$**

Annexes

Introduction – 4/ Eléments de modélisation

- Pour modéliser les oscillations d'une structure, on peut avoir besoin de considérer plusieurs ressorts, de raideur différente
- On peut trouver un ressort équivalent, permettant de rendre compte du même « effet » que l'ensemble des ressorts pour le comportement vibratoire, grâce à des formules de raideurs équivalentes

Introduction – 4/1. Ressorts en parallèle

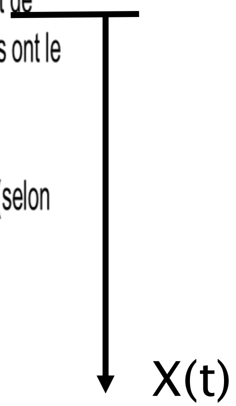


Introduction – 4/1. Ressorts en parallèle (suite)

Soit ΔX l'allongement des ressorts sous l'effet de l'accrochage de la masse m (tous les ressorts ont le même allongement)

Bilan des forces de rappel appliquées sur m (selon l'axe X) :

$$F_{Rappel} = -k_1\Delta X - k_2\Delta X - \cdots - k_n\Delta X$$



Soit ΔX l'allongement des ressorts sous l'effet de l'accrochage de la masse m (tous les ressorts ont le même allongement)

Bilan des forces de rappel appliquées sur m (selon l'axe X) :

$$F_{Rappel} = -k_1\Delta X - k_2\Delta X - \cdots - k_n\Delta X$$

De même, en considérant le modèle équivalent :

$$F_{Rappel} = -k_{eq}\Delta X$$

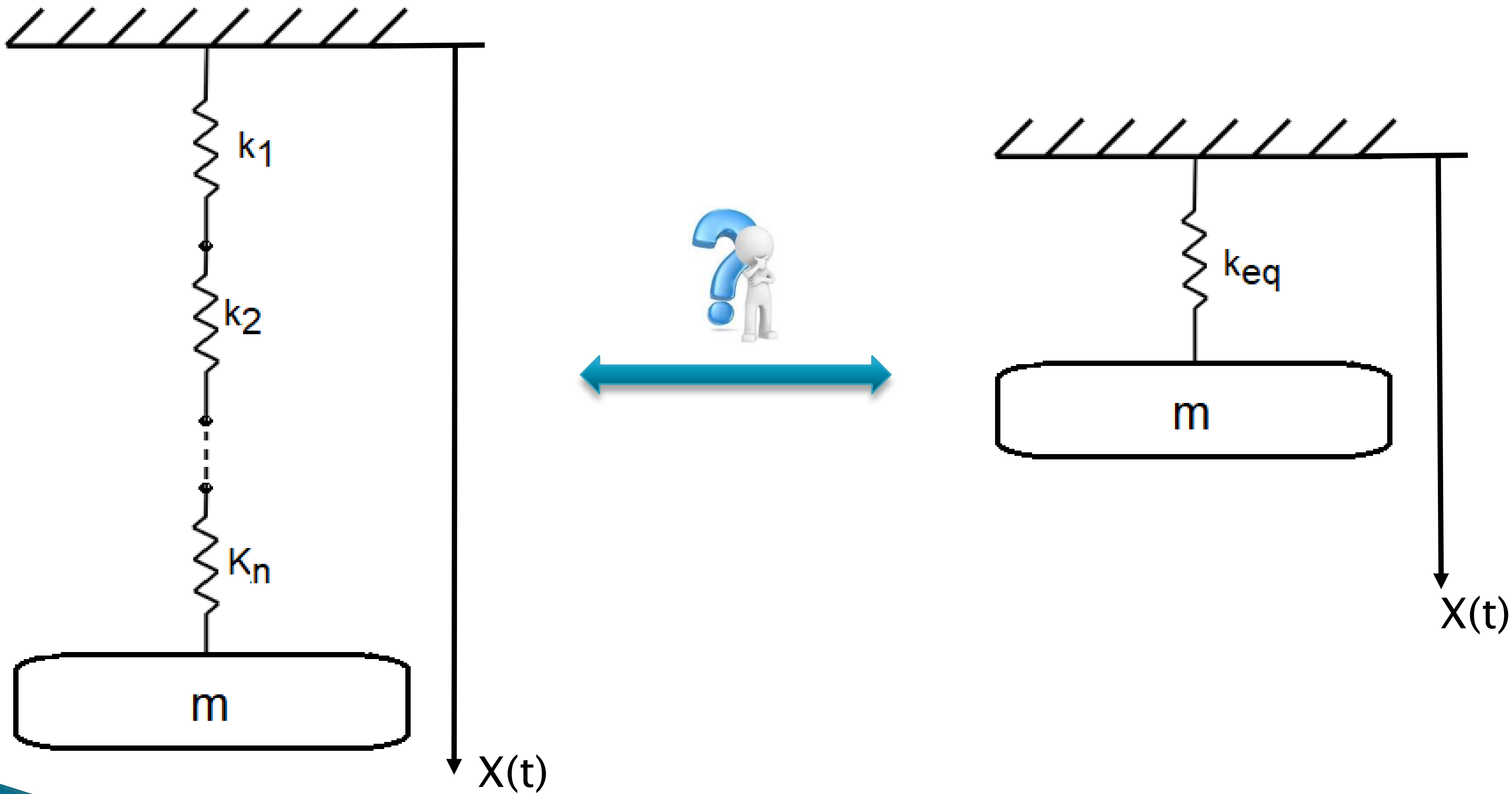
On en déduit immédiatement que **pour des ressorts en parallèle :**

$$\boxed{k_{eq} = \sum_{i=1}^{n} k_i}$$

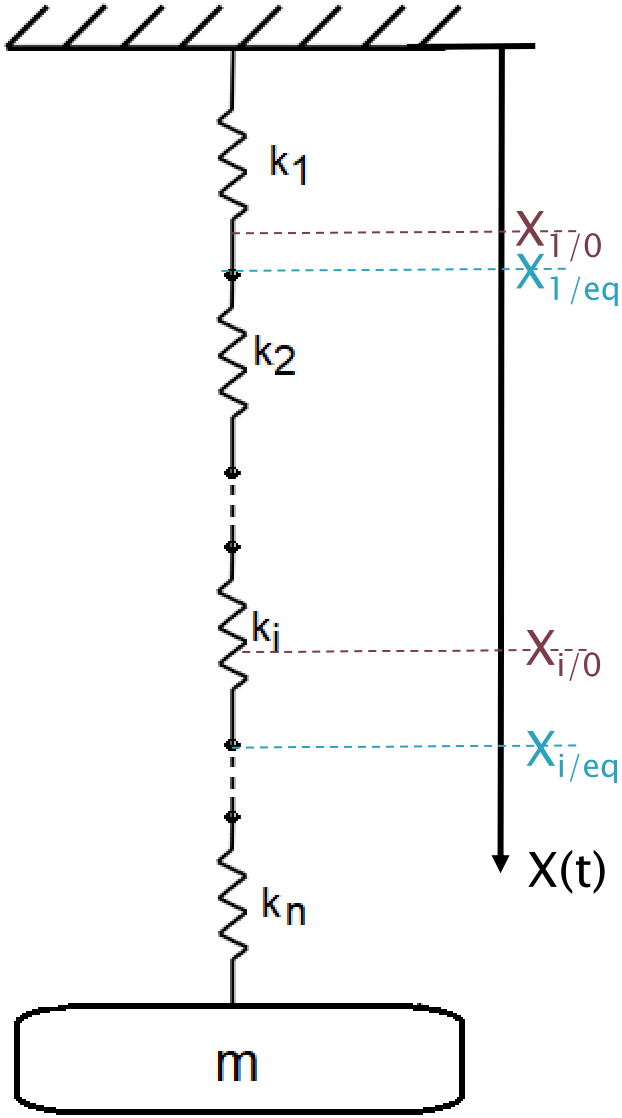
Introduction – 4/2. Ressorts en série

Même raisonnement pour des ressorts en série

Introduction – 4/2. Ressorts en série



Introduction – 4/2. Ressorts en série (suite)



Soit ΔX_i l'allongement du ressort n°i sous l'effet de la suspension de la masse m.
A l'équilibre statique, les extrémités des ressorts sont aux positions $X_{i/eq}$, $\forall i$.

En chaque position $X_{i/eq}$, on peut écrire les conditions d'équilibre statique, qui donnent :

$$\begin{cases} -k_1 \Delta X_1 + k_2 \Delta X_2 = 0 \\ -k_2 \Delta X_2 + k_3 \Delta X_3 = 0 \\ \vdots \\ -k_{i-1} \Delta X_{i-1} + k_i \Delta X_i = 0 \\ \vdots \\ -k_n \Delta X_n + mg = 0 \end{cases}$$

D'où : $\Delta X_{i-1} = \frac{k_i}{k_{i-1}} \Delta X_i, \forall i$ de 2 à n.

On note ΔX le cumul des allongements, i.e.
$\Delta X = \sum_{i=1}^{n} \Delta X_i$.

Introduction – 4/2. Ressorts en série (suite)

Avec les équations d'équilibre précédentes, on a :

$$\begin{cases} \Delta X_1 = \dfrac{k_2}{k_1}\Delta X_2 = \dfrac{k_2}{k_1}\dfrac{k_3}{k_2}\Delta X_3 = \cdots = \dfrac{k_n}{k_1}\Delta X_n \\ \vdots \\ \Delta X_i = \dfrac{k_n}{k_i}\Delta X_n \\ \vdots \\ \Delta X_n = mg \end{cases}$$

Alors, $\Delta X = \sum_{i=1}^{n} \Delta X_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_i}\right) k_n \Delta X_n + \Delta X_n = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}\right) k_n \Delta X_n$ (avec $\Delta X_n = \frac{k_n}{k_n}\Delta X_n$).

Si on considère le schéma équivalent, on a aussi : $-k_{eq}\Delta X + mg = 0$, soit $\Delta X = \frac{mg}{k_{eq}}$.

En se souvenant que $k_n \Delta X_n = mg$, on en déduit que $\frac{mg}{k_{eq}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}\right) mg$ et enfin que :

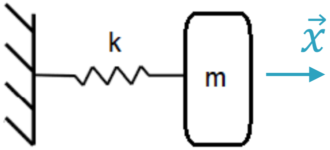
Pour des ressorts en série :

$$\boxed{\frac{1}{k_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}}$$

4/3. Exemples de correspondance ressort-structure

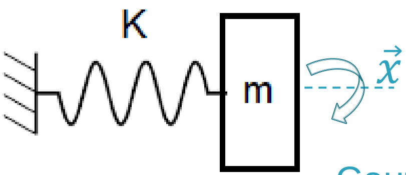
- On a vu que la modélisation du comportement vibratoire d'une structure fait intervenir un ressort, qui modélise le fait que la masse est toujours ramenée vers sa position à l'équilibre statique (autrement dit : la masse oscille autour de cette position)

- Selon que le déplacement vibratoire est en translation ou en rotation, on considère :
  - Translation : un ressort en traction/compression (le fil travaille en torsion), de raideur k (en N/m) avec $k = \frac{Gd^4}{64nR^3}$, où G est le module du Coulomb du matériau du ressort, d le diamètre du fil, n le nombre de spires et R le rayon d'enroulement du ressort ;



Force de rappel : $\vec{F}_R = -k(x - l_0)\vec{x}$

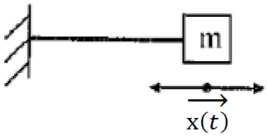
  - Rotation : un ressort de torsion (le fil travaille en flexion), de raideur K (en Nm/rad) avec $K = \frac{Ed^4}{128nR}$, où E est le module d'Young du matériau du ressort (même signification pour les autres termes) ;



Couple de rappel : $\vec{C}_R = -K(\alpha - \alpha_0)\vec{x}$

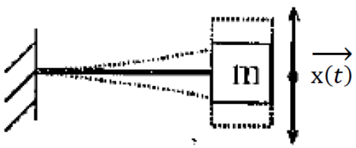
Intro. – 4/3. Ex. correspondances ressort - structure

- Modélisation de certains éléments de structure :
  - Barre en vibrations longitudinales (la barre travaille en traction/compression)



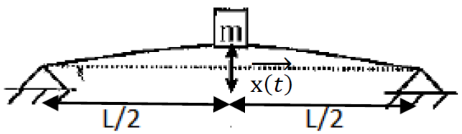
Force de rappel (horizontale) $F_R = -kx(t)$ avec $k = \frac{ES}{\mathrm{L}}$

  - Lame encastrée-libre en vibrations transversales (la lame travaille en flexion)



Force de rappel (verticale) $F_R = -kx(t)$ avec $k = \frac{3EI_q}{\mathrm{L}^3}$

  - Poutre sur deux appuis en vibrations transversales (la poutre travaille en flexion)



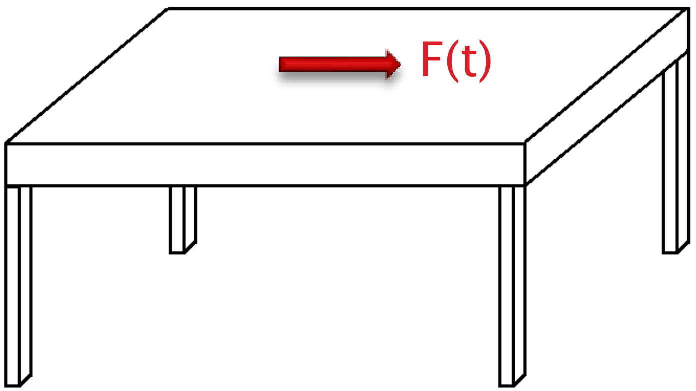
Force de rappel (verticale) $F_R = -kx(t)$ avec $k = \frac{48EI_q}{\mathrm{L}^3}$

  - Barre de torsion

Couple de rappel (autour de l'axe de la barre)
$C_R = -K\alpha(t)$ avec $K = \frac{GI_0}{\mathrm{L}}$

Avec G le module de Coulomb et E le module d'Young du matériau de la barre/lame ; S la section droite, L la longueur, I_q le moment quadratique et I_0 le moment de torsion de la barre/lame

Introduction – 5/ Exemple d'application

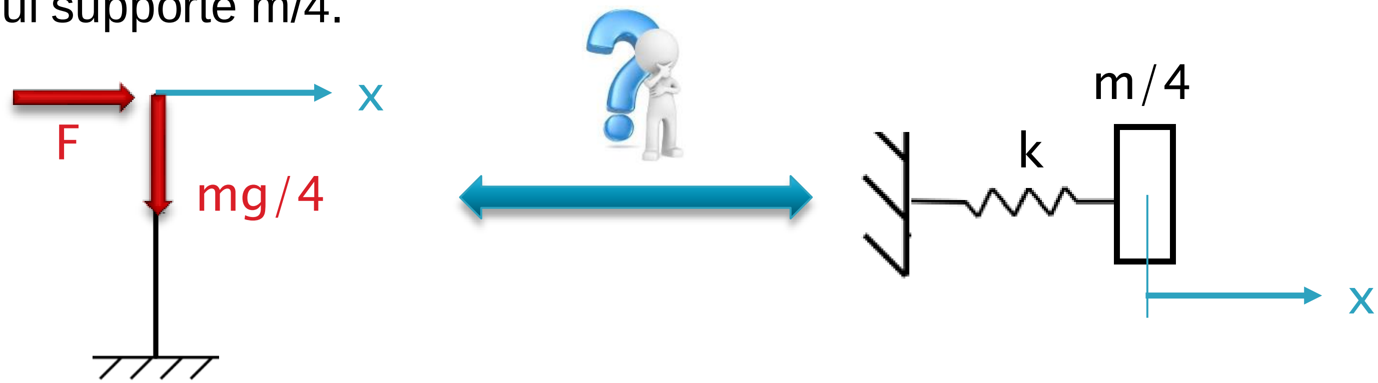


Soit une dalle anti-sismique de masse m soutenue par 4 poteaux.
Les poteaux, de matériau, longueur et section identiques, sont encastrés au sol et articulés avec la dalle.
Un séisme provoque une excitation sinusoïdale horizontale, F(t), de la dalle.

Comment modéliser le comportement vibratoire horizontal de la dalle par un oscillateur à 1 ddl (en négligeant l'amortissement) ?

Introduction – 5/ Exemple d'application (suite)

Isolons un poteau (hauteur h),
qui supporte m/4.



Pour identifier k dans l'oscillateur modélisant le comportement vibratoire du poteau, on suppose qu'un effort statique horizontal F est appliqué en haut du poteau.
Un calcul de RDM donne alors la flèche statique, ΔX, en haut du poteau, telle que :
$\Delta X = \frac{Fh^3}{3EI}$, où h est la hauteur du poteau, E le module d'Young du matériau le constituant et I le moment quadratique de sa section.

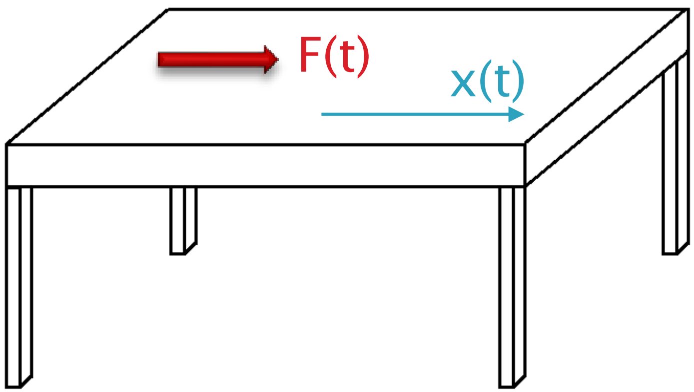
La force de rappel à l'équilibre statique est telle que : $-\mathrm{k}\Delta X + F = 0$

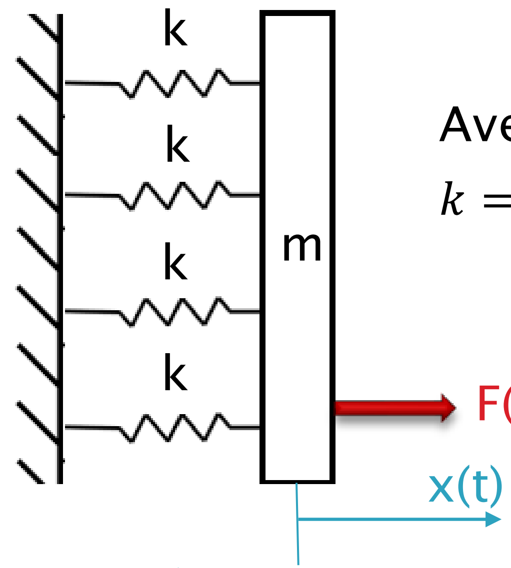
On identifie alors la raideur k de l'oscillateur modélisant le poteau : $\mathrm{k} = \frac{3EI}{h^3}$

Introduction – 5/ Exemple d'application (suite)

Modélisation du système complet

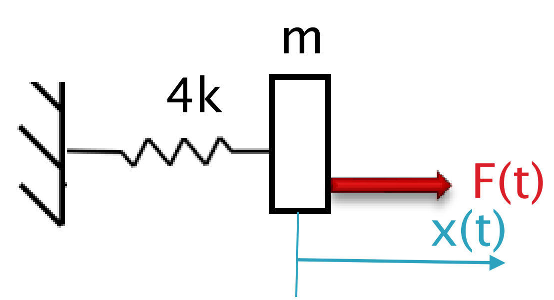
Les 4 poteaux sont identiques, alors :





Avec
$k = \frac{3EI}{h^3}$

Ressort en parallèle



On peut **modéliser le comportement vibratoire horizontal** de la dalle par un système masse m + ressort de raideur 4k (en négligeant l'amortissement)
=> *On pourra calculer la réponse vibratoire x(t) due au séisme !*