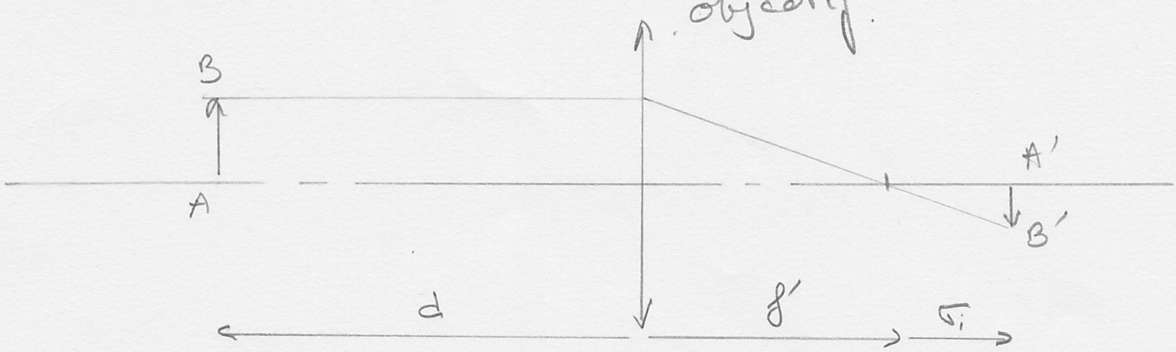
1 Cadrage.



Le grandissement γ s'écrit : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

Si on considère que $\sigma_i \ll f'$ alors :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{f'}{d}$$

d'où $f' = d \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

Pour le 1er but situé à 20 m.

$$f' = 20 \times \frac{9{,}6\ 10^{-3}}{7{,}32}$$

$$f' = 26{,}23 \text{ mm}$$

Pour le 2nd but situé à 20 + 105 m.

$$f' = 125 \times \frac{9{,}6\ 10^{-3}}{7{,}32}$$

$$f' = 163{,}93 \text{ mm}$$

2. La prise de vues.

1a. La mise au point sur l'infini est obtenue lorsque l'image est formée dans le plan focal image.
La tour est vue sous un angle :

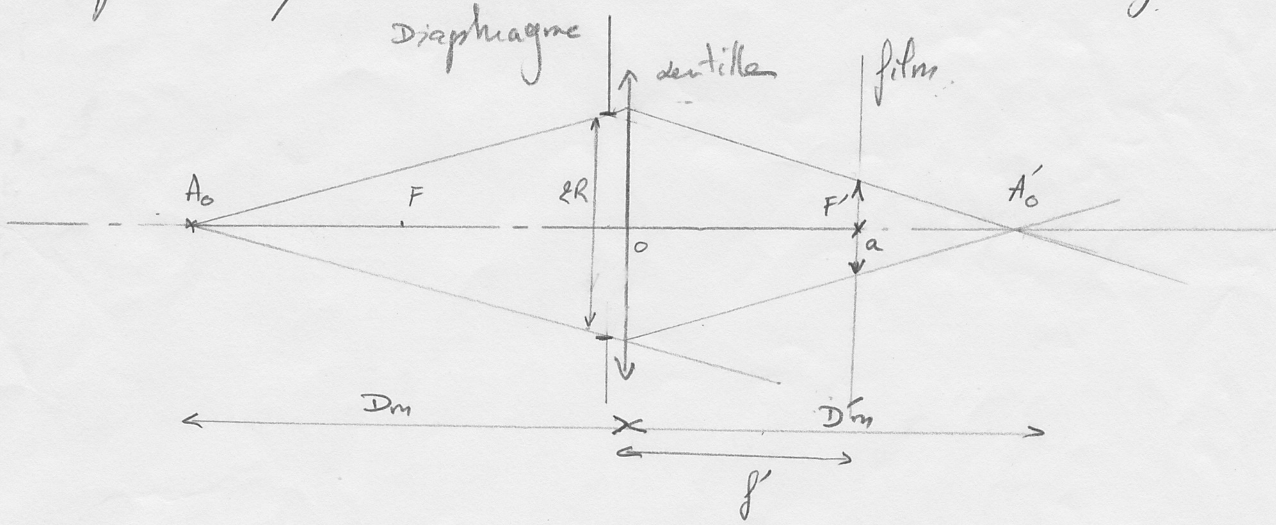
$$\alpha = \frac{h}{D} = \frac{100}{1000} = 0,1 \ \text{rad}.$$

La hauteur de l'image de la tour est donc :

$$A'B' = f'\alpha = f'\frac{h}{D}$$

AN : $A'B' = 38$ mm.
(Pas de signe ici)

b. Un objet ponctuel à l'infini sur l'axe optique a pour image le foyer principal image F'.
Un objet A de l'axe, à une distance finie de l'objectif, a une image A' en arrière du plan focal image.
Sur le film disposé dans le plan focal image, la tache image sera nette si son diamètre est inférieur ou égal au diamètre a du grain du film. Cette condition est réalisée pour l'ensemble des points objets de l'axe situés entre l'infini et le point limite A_0 pour lequel le diamètre de la tache image est a



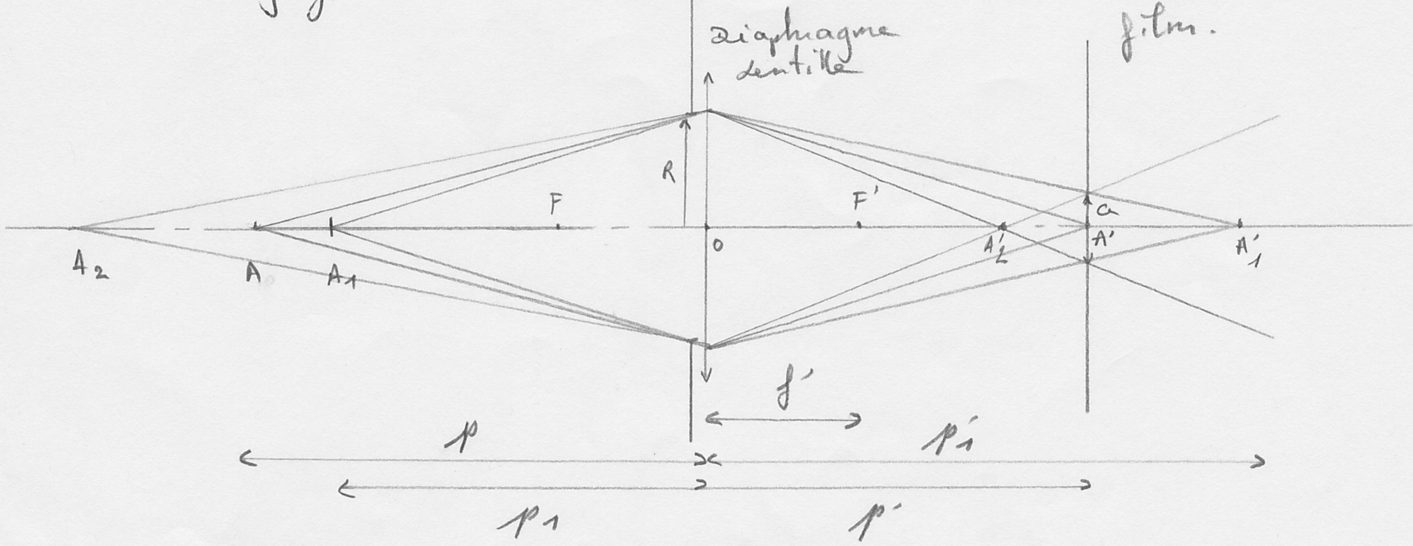
Dans les triangles semblables de sommet A'_0, on a :

$$\frac{2R}{D'm} = \frac{a}{D'm - f'} \quad \text{avec } 2R = \frac{f'}{N} \text{ et } \frac{1}{D'm} - \frac{1}{Dm} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{2R}{a} = \frac{D'm}{D'm - f'} \quad \text{ou} \quad D_m = \frac{D'm\, f'}{f' - D'_m}$$

donc $\frac{f'}{Na} = -\frac{Dm}{f'}$ d'où $D_m = \frac{-f'^2}{Na}$ AN : N=2

B a La mise au point sur A impose que le film soit disposé dans le plan image qui passe par le conjugué A' de A.



* calcul de p_1 :

D'après les relations de conjugaison :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \qquad \text{ou} \qquad p' = \frac{p f'}{f' + p}$$

$$\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f'} \qquad \text{ou} \qquad p_1 = \frac{p'_1 f'}{f' - p'_1}$$

La similitude des triangles de sommet commun A'_1 impose

$$\frac{p'_1 - p'}{p'_1} = \frac{a}{2R} = \frac{Na}{f'}$$

Il vient ainsi :

$$p' = p'_1 \left(1 - \frac{Na}{f'}\right) = \frac{p f'}{f' + p}$$

donc $$p'_1 = \frac{p f'}{\left(1 - \frac{Na}{f'}\right)(f' + p)}$$

c'est à dire $$p_1 = \frac{p}{1 - \frac{Na}{f'^2}(f' + p)}$$

* Calcul de p_2 :

La similitude des triangles de sommet A'_L impose :

$$\frac{p' - p'_2}{p'_2} = \frac{a}{2R} = \frac{Na}{f'}$$

d'où $p' = p'_2 \left(1 + \frac{Na}{f'}\right)$

et $p' = \frac{p f'}{f' + p}$ d'après la relation de conjugaison.

donc $p'_2 = \frac{p f'}{\left(1 + \frac{Na}{f'}\right)(f' + p)}$

sachant que la relation de conjugaison donne :

$$p_2 = \frac{p'_2 f'}{f' - p'_2}$$

on obtient :

$$p_2 = \frac{p}{1 + \frac{Na}{f'^2}(f' + p)}$$

b. Applications numériques.

$N = 2$: $p_1 = -2,268$ m et $p_2 = -2,785$ m

d'où $x_2 = |p_2 - p_1| \simeq 0,52$ m.

$N = 11,3$ $p_1 = -1,584$ m et $p_2 = -5,924$ m

d'où $x_{11,3} = |p_2 - p_1| \simeq 4,34$ m.

Ainsi, plus N augmente (donc plus le diaphragme est fermé), plus la profondeur de champ augmente, mais corrélativement le flux lumineux qui impressionne le film diminue.

C La mise au point sur le sujet mobile, placé à $p = -8$ m, impose au film d'être à une distance p' :

$$p' = \frac{f'p}{f'+p} \quad \text{d'où} \quad p' = 37{,}82 \text{ mm.}$$

La netteté de la photo sera assurée malgré le mouvement du sujet si pendant le temps d'ouverture (ou temps de pose) T, le déplacement transversal de l'image ne dépasse pas la valeur du diamètre a du grain du film.

Pendant ce temps T, l'objet parcourt le chemin VT et le déplacement du point image est donc γ VT où γ est le grandissement linéaire :

$$\gamma = \frac{p'}{p} = \frac{f'}{f'+p}$$

La condition de netteté est donc

$$\gamma VT = \frac{f'VT}{f'+p} \leq a$$

$$T \leq \frac{a(f'+p)}{V f'}$$

Le temps de pose maximal est donc

$$T_{max} = \frac{a(f'+p)}{V f'} \simeq 2{,}5\ 10^{-3}\ s = \frac{1}{400}\ s$$

⚠ 9 km/h = 2,5 m/s.

3. FTM.

$$P_{MA} = \frac{\text{Largeur du capteur}}{\text{Nbre de périodes}}$$

d'où $P_{MA} = \frac{24,4}{1920} = 12,71\ 10^{-3}$ mm.

de même $P_{MB} = \frac{6,4}{1920} = 3,34\ 10^{-3}$ mm

La fréquence spatiale est l'inverse de la période

$f_{MA} = \frac{1}{P_{MA}} = 78,69$ mm^{-1} et $f_{MB} = \frac{1}{P_{MB}} = 300$ mm^{-1}

Sur une ligne, il y a 3840 photosites donc :

$P_{PA} = \frac{24,4}{3840} = 6,35\ 10^{-3}$ mm

et $P_{PB} = \frac{6,4}{3840} = 1,67\ 10^{-3}$ mm

$f_{PA} = \frac{1}{P_{PA}} = 157,28$ mm^{-1}

et $f_{PB} = \frac{1}{P_{PB}} = 600$ mm^{-1}

On a en fait $f_{MA} = \frac{f_{PA}}{2}$ et $f_{MB} = \frac{f_{PB}}{2}$

Pour le caméscope A, on a un contraste de 0,7 pour $f_{MA} = 78,69$ mm^{-1}

Pour le caméscope B, le contraste n'est que de 0,025 pour $f_{MB} = 300$ mm^{-1} ce qui n'est pas suffisant pour restituer une image 4K à N=5,6

4 Nombre d'ouverture et profondeur de champ de l'œil.

1- $N = \dfrac{f'}{D}$

d'où pour l'œil : $N = \dfrac{20}{2} = 10$

ou $N = \dfrac{20}{8} = 2{,}5$

ceci est comparable avec les ouvertures d'un objectif d'appareil photo

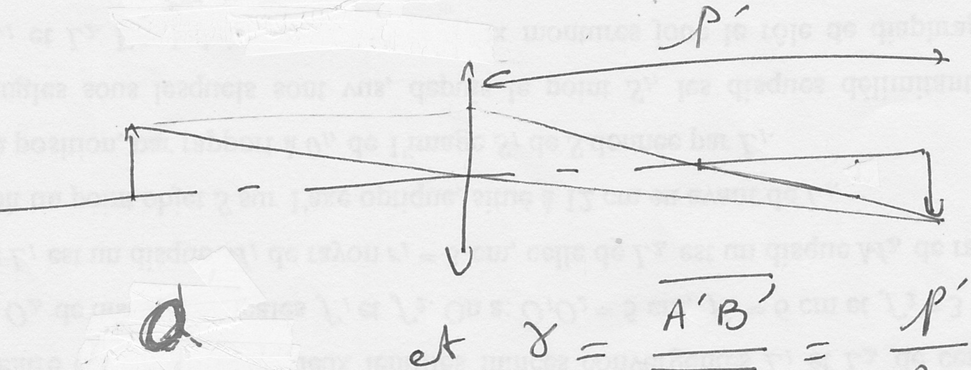
2- objet à l'infini → image au foyer.

objet à distance finie → image à distance finie.

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{p} = \frac{p+f}{fp}$$

$$p' = \frac{pf}{p+f}.$$

3. 

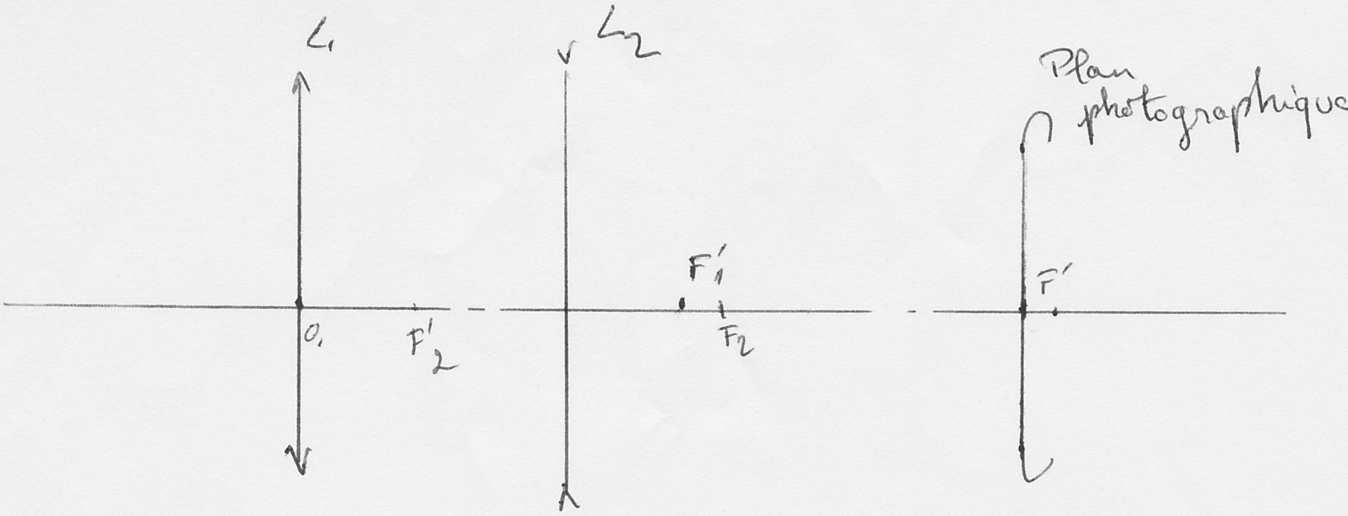
$$\frac{\overline{A''B''}}{p'} = \frac{a}{f'} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{p'}{p}$$

$$\overline{A'B'} = \frac{p'}{p}\,\overline{AB} = \frac{p'}{p}\,\frac{D}{2}$$

$$\frac{p' D}{2 p\, p'} = \frac{a}{f'} \Rightarrow p = \frac{Df'}{2a} = \frac{f'^2}{2Na}$$

AN : $p = 5$ si $N=10$
20 si $N=35$

1)



objet à l'infini : image par L_1 en F'_1 et $\overline{O_1F'_1} = +10$ cm.
et image par téléobjectif en F' avec $\overline{O_1F'} = +19$ cm

Relation de conjugaison pour L_2

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

avec $\overline{O_2F'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'} = \overline{O_1F'} - e$

$\overline{O_2F'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = \overline{O_1F'_1} - e$

$$\frac{1}{\overline{O_1F'} - e} - \frac{1}{\overline{O_1F'_1} - e} = \frac{1}{f'_2}$$

$$\left(\overline{O_1F'_1} - e\right) - \left(\overline{O_1F'} - e\right) = \frac{\left(\overline{O_1F'} - e\right)\left(\overline{O_1F'_1} - e\right)}{f'_2}$$

$$f'_2\left(\overline{O_1F'_1} - \overline{O_1F'}\right) = \overline{O_1F'} \cdot \overline{O_1F'_1} + e^2 - e\left(\overline{O_1F'} + \overline{O_1F'_1}\right)$$

$$0 = e^2 - e\left(\overline{O_1F'} + \overline{O_1F'_1}\right) + \overline{O_1F'} \cdot \overline{O_1F'_1} + f'_2\left(\overline{O_1F'} - \overline{O_1F'_1}\right)$$

$$e = \frac{\left(\overline{O_1F'} + \overline{O_1F'_1}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\overline{O_1F'} + \overline{O_1F'_1}\right)^2 - 4\left(\overline{O_1F'} \cdot \overline{O_1F'_1} + f_2\left(\overline{O_1F'} - \overline{O_1F'_1}\right)\right)}}{2}$$

$$0 = e^2 - e\left(f'_1 + D\right) + D \cdot f'_1 + f'_2\left(D - f'_1\right)$$

$$0 = e^2 - e\left(f'_1 + D\right) + D\left(f'_1 + f'_2\right) - f'_1 f'_2$$

AN : $0 = e^2 - 29e + 154$

$D = 225$ et $e = \dfrac{29 \pm 15}{2}$

$e = 7\,cm$ (car $e < D$).

2). Si l'image est à l'infini, l'objet est au foyer objet :

$$F \xrightarrow{L_1} F_2 \xrightarrow{L_2} \infty.$$

$$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{f'_1} \Rightarrow \overline{O_1F} = \frac{f'_1(e - f'_2)}{f'_1 + f'_2 - e}$$

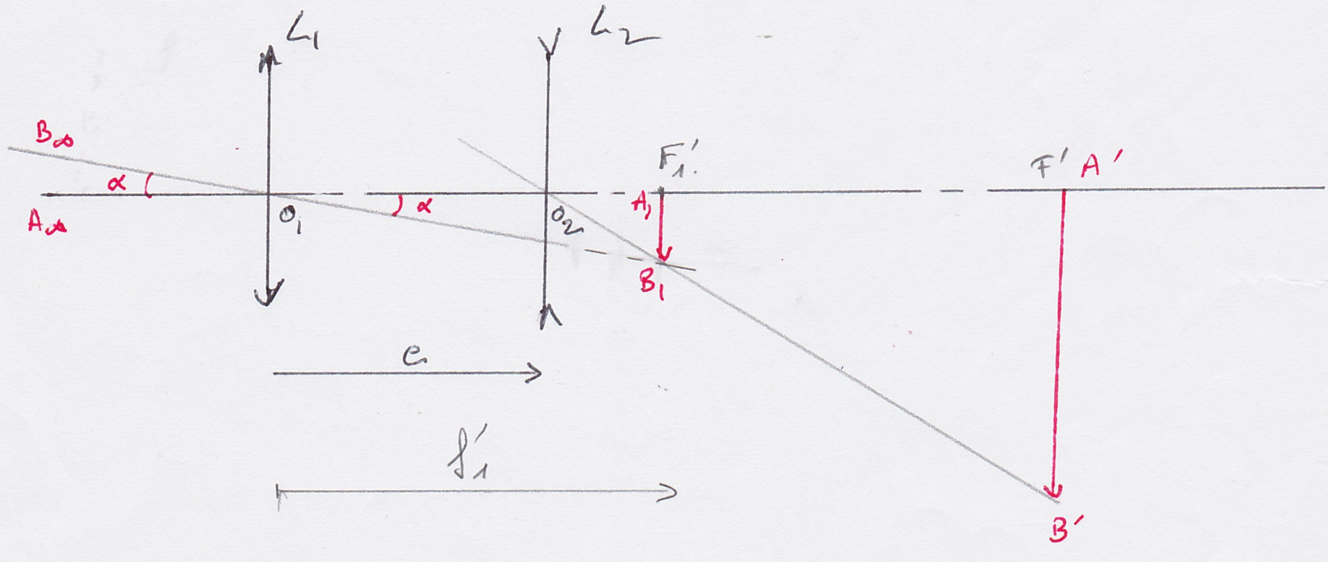
or $\overline{O_1F_2} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = e + f_2 = e - f'_2$

AN : $\overline{O_1F} = \dfrac{10(7+4)}{10-4-7} = \dfrac{10 \times 11}{-1} = -110\,cm$

3). Relation de Gullstrand :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2} \quad \text{soit } f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} = 40\,cm$$

4).



Si la tour est très éloignée, son image par L_1 se forme au foyer image de celle-ci : A_1 en F'_1.

d'où $\tan\alpha \simeq \alpha = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{f'_1}$

Cette image A_1B_1 est agrandie par L_2 qui en donne une image définitive $A'B'$ telle que :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \frac{\overline{O_2F'}}{\overline{O_2F_1'}}$$

or $\overline{O_2F'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'} = -e + D$

$\overline{O_2F_1'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_1'} = -e + f_1'$

Il vient : $\gamma = \dfrac{D-e}{f_1'-e}$

et $\overline{A'B'} = \gamma\ \overline{A_1B_1}$

$$\overline{A'B'} = \frac{D-e}{f_1'-e} \cdot f_1 \alpha .$$

<u>AN</u> : $\overline{A'B'} = \dfrac{19-7}{10-7} \times 10 \times 0{,}03$.

$\overline{A'B'} = 1{,}2 \text{ cm}$

<u>Rq</u> : pour une lentille unique (objet à l'infini et image au foyer) $\overline{A'B'} = f'\alpha$

Par identification, on obtient $f' = \dfrac{D-e}{f_1'-e}\, f_1$

<u>AN</u> $f' = 40 \text{ cm}$

c'est le même résultat qu'au 3)

5) La pupille d'entrée de diamètre D_1 et de centre C_1 a pour image par L_1 le diaphragme d'ouverture D, de centre C. La relation de conjugaison par L_1 s'écrit

$$\frac{1}{\overline{O_1C}} - \frac{1}{\overline{O_1C_1}} = \frac{1}{f_1'} \quad \text{soit} \quad \overline{O_1C_1} = \frac{f_1'\,\overline{O_1C}}{f_1' - \overline{O_1C}}$$

$$\overline{O_1C} = \frac{f_1'\, X}{f_1' - X}$$

Le grandissement γ s'écrit :

$$\gamma = \frac{D}{D_1} = \frac{\overline{O_1C}}{\overline{O_1C_1}} = x \times \left(\frac{f'_1 - x}{f'_1\, x}\right) = 1 - \frac{x}{f'_1}$$

On en déduit le nombre d'ouverture N :

$$N = \frac{f'}{D_1} = \frac{f'}{D}\left(1 - \frac{x}{f'_1}\right)$$

d'où $D = \frac{f'}{N}\left(1 - \frac{x}{f'_1}\right)$

<u>AN</u> $D = \frac{140}{N}$

pour $N = 4$ alors $D = 35$ mm

$N = 5{,}6$ — $D = 25$ mm

$N = 8$ — $D = 17{,}5$ mm

$N = 11{,}3$ — $D = 12{,}4$ mm

$N = 16$ — $D = 8{,}75$ mm

6 Diaphragme et vignettage

1) Le système est afocal :
le foyer image de la première lentille est confondu avec le foyer objet de la seconde.

$$d = \overline{O_1 O_2} = f'_1 + f'_2 = 82 \text{ cm}.$$

Considérons un objet à l'infini sur l'axe. Son image par L_1 est en F'_1. Depuis F'_1, le bord de la monture de L_1 est vu sous le demi-angle au sommet α_1, tel que :

$$\operatorname{tg}|\alpha_1| = \frac{R_1}{f'_1} = \frac{1}{20}.$$

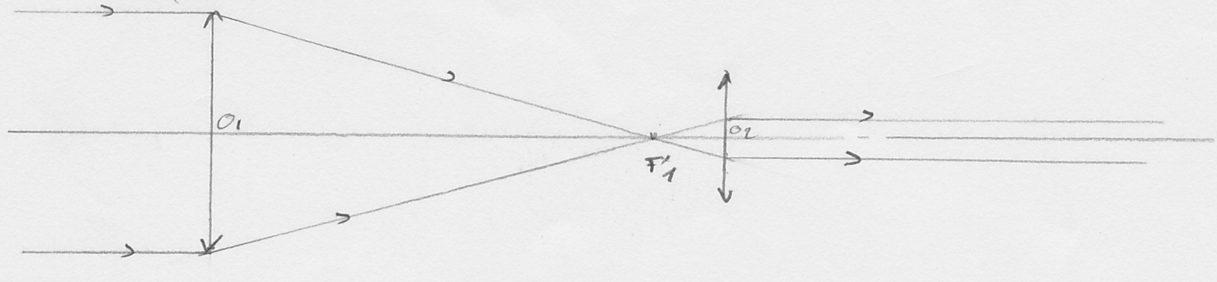
Depuis F'_1 (confondu avec F_2), le bord de la monture de L_2 est vu sous le demi-angle au sommet α_2, tel que

$$\operatorname{tg}|\alpha_2| = \frac{R_2}{f'_2} = \frac{1}{4}.$$

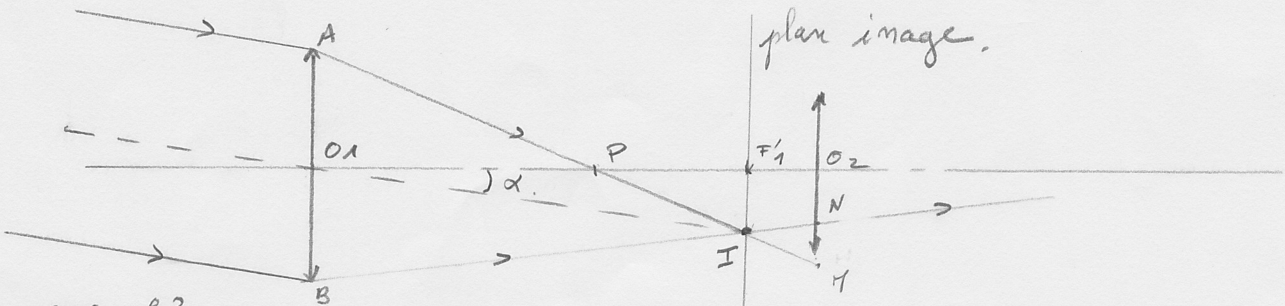
Le diaphragme d'ouverture est celui qui est vu depuis F'_1 sous le plus petit angle : c'est donc la monture de L_1

2) Considérons un faisceau incident de rayons parallèles, dont la direction fait un angle α avec l'axe optique de la lunette. Après traversée de L_1, ce faisceau converge au foyer image secondaire de L_1 qui est l'intersection du plan focal image de L_1 et l'axe optique secondaire dont la direction est parallèle à celle du faisceau incident.

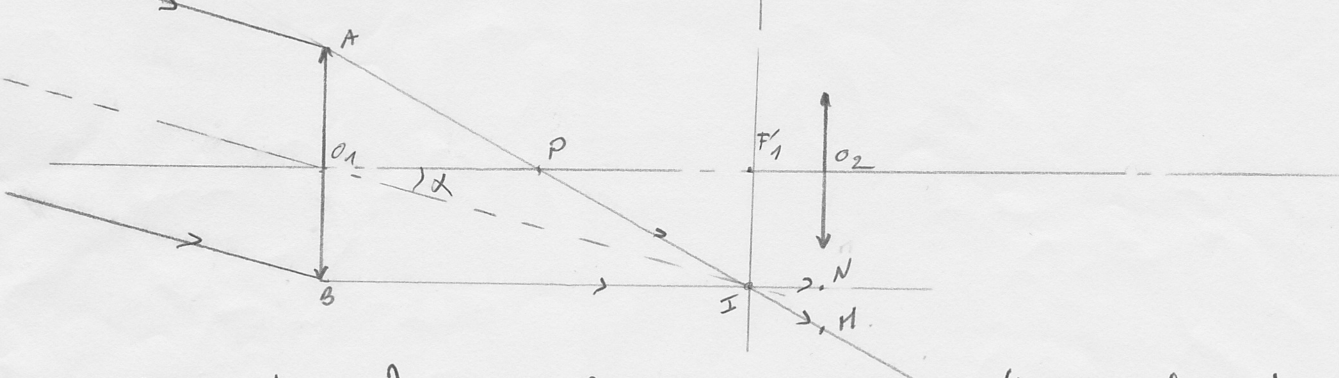
Cas n°1 : $\alpha = 0$



cas n°2



cas n°3



Si l'on veut éviter le phénomène de vignettage, il faut empêcher les rayons de traverser L_2 pour $|\alpha| > |\alpha_v|$ au moyen d'un diaphragme approprié qui deviendra le nouveau diaphragme de champ.

Il est aisé d'intercepter les rayons en leur point de convergence I : on placera donc le diaphragme de champ dans le plan focal image de L_1, confondu ici avec le plan focal objet de L_2. Le diaphragme de champ aura un rayon R_{DC} :

$$R_{DC} = F'_1 I \quad \text{pour} \quad \alpha = \alpha_v.$$

Les triangles PO_1A, PO_2M et PF'_1I sont semblables :

$$\frac{R_1}{O_1P} = \frac{R_2}{O_2P} = \frac{R_{DC}}{PF'_1} \qquad \text{pour } \alpha = \alpha_v.$$

Or $\overline{PF'_1} = \overline{PF_2} = \overline{PO_2} - f'_2$

D'une part : $\frac{R_1}{\overline{O_1P}} = \frac{R_2}{-\overline{O_2P}}$

$$-\left(\frac{R_1}{\overline{PO_1}}\right) = \frac{R_2}{\overline{PO_2}}$$

$$\frac{R_1}{\overline{O_1P}} = \frac{R_2}{\overline{PO_2}}$$

d'où $R_1 . \overline{O_2P} = -R_2 . \overline{O_1P}$

$$R_1 . \overline{O_2P} + R_2\ \overline{O_1P} = 0$$

$$\overline{O_2P} . (R_1 + R_2) + R_2 . (-\overline{O_2P} + \overline{O_1P}) = 0$$

$$\overline{O_2P} . (R_1 + R_2) + R_2\ \overline{O_1O_2} = 0$$

$$\frac{R_2}{\overline{O_2P}} = -\frac{R_1 + R_2}{\overline{O_1O_2}} .$$

D'autre part : $\frac{R_2}{-\overline{O_2P}} = \frac{R_{DC}}{-\overline{O_2P} - f'_2}$

d'où $R_2 . (-\overline{O_2P} - f'_2) = -R_{DC} . \overline{O_2P}$

$$R_2 . (-\overline{O_2P} - f'_2) + R_{DC} . \overline{O_2P} = 0$$

$$\overline{O_2P}\ (-R_2 + R_{DC}) - R_2 f'_2 = 0$$

$$\frac{R_2}{\overline{O_2P}} = \frac{-R_2 + R_{DC}}{f'_2} .$$

Donc finalement :

$$-\frac{R_1 + R_2}{\overline{O_1O_2}} = \frac{-R_2 + R_{DC}}{f'_2}$$

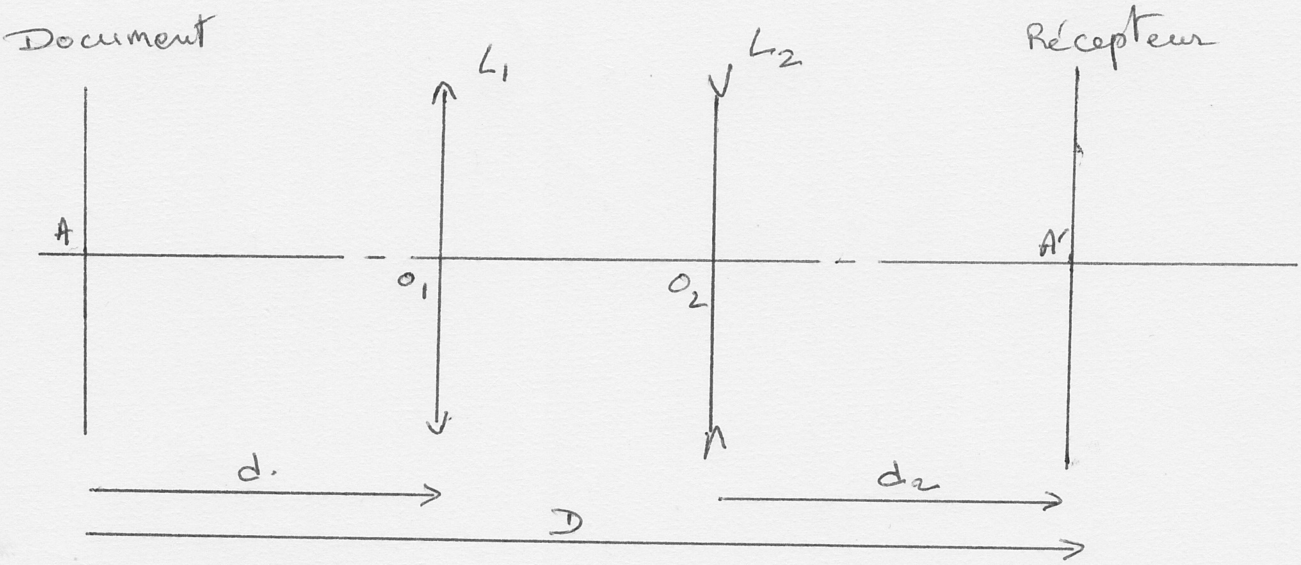
et $R_{DC} = R_2 - f'_2 . \frac{R_1 + R_2}{\overline{O_1O_2}}$

α_v est le demi angle de champ :

$$tg\,|\alpha_v| = \frac{R_{DC}}{f'_1} .$$

7 Objectif de photocopieur.

1- L'objet est réel, la lentille divergente L_2 ne peut pas donner une image réelle directement observable sur le récepteur.



L'objet réel AB donne une image intermédiaire A_1B_1 à travers L_1 puis une image définitive $A'B'$ à travers de L_2. Les relations de conjugaisons s'écrivent ainsi :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

soit $\quad \overline{O_1A_1} = \dfrac{f'_1\,\overline{O_1A}}{f'_1 + \overline{O_1A}} \quad$ et $\quad \overline{O_2A_1} = \dfrac{f'_2\,\overline{O_2A'}}{f'_2 - \overline{O_2A'}}$

L'objet est en A : $\overline{O_1A} = -d$

L'image finale est en A' : $\overline{O_2A'} = d_2$

d'où $\quad \overline{O_1A_1} = \dfrac{d f'_1}{d - f'_1} \quad$ et $\quad \overline{O_2A_1} = \dfrac{d_2 f'_2}{f'_2 - d_2}$

Avec $\overline{O_1 A_1} = \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 A_1}$

et $\overline{O_1 O_2} = \overline{O_1 A} + \overline{A A'} + \overline{A' O_2}$

$\overline{O_1 O_2} = \overline{O_1 A} + \overline{A A'} - \overline{O_2 A'}$

$\overline{O_1 O_2} = D - d - d_2$

finalement $\overline{O_1 A_1} = \dfrac{d f'_1}{d - f'_1} = (D - d - d_2) + \dfrac{d_2 f'_2}{f'_2 - d_2}$

il vient alors.

$$d f'_1 = (d - f'_1)\left[(D - d - d_2) + \frac{d_2 f'_2}{f'_2 - d_2} \right]$$

$$f'_1 \left(\cancel{d} + (D - \cancel{d} - d_2) + \frac{d_2 f'_2}{f'_2 - d_2} \right) = d \left[(D - d - d_2) + \frac{d_2 f'_2}{f'_2 - d_2} \right]$$

$$f'_1 \left(\frac{(D - d_2)(f'_2 - d_2) + d_2 f'_2}{f'_2 - d_2} \right) = d \left[\frac{(D - d - d_2)(f'_2 - d_2) + d_2 f'_2}{f'_2 - d_2} \right]$$

$$f'_1 = \frac{d\left[(D - d - d_2)(f'_2 - d_2) + d_2 f'_2\right]}{(D - d_2)(f'_2 - d_2) + d_2 f'_2}$$

$$f'_1 = \frac{d\left((D - d)(f'_2 - d_2) - d_2^2\right)}{D(f'_2 - d_2) + d_2^2}$$

<u>AN</u>: avec $f'_2 = -9$ cm.

$D = 38{,}4$ cm

$d = d_2 = 18$ cm.

On obtient : $f'_1 = 5{,}73$ cm.

3) Le grandissement γ est le résultat des grandissements successifs dus à L_1 et L_2 :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \cdot \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \gamma_2 \times \gamma_1$$

or $$\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = d_2 \times \frac{f'_2 - d_2}{d_2 f'_2}$$

$$\gamma_2 = \frac{f'_2 - d_2}{f'_2}$$

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{d f'_1}{d - f'_1} \times \frac{1}{-d}$$

$$\gamma_1 = \frac{-f'_1}{d - f'_1} = \frac{f'_1}{f'_1 - d}$$

D'où finalement.

$$\gamma = \frac{f'_1 (f'_2 - d_2)}{f'_2 (f'_1 - d)}$$

<u>AN</u> : $\gamma = -1,4 \simeq -\sqrt{2}$

Un document voit ainsi ses dimensions transversales grandies de $\sqrt{2}$ et donc sa surface est doublée. Le tirage est donc $A_4 \rightarrow A_3$.

4). La lentille L_1 est constituée des lentilles L_{1a} et L_{1b} accolées. En utilisant la relation de Gullstrand dans ce cas $(e=0)$:

$$\frac{1}{f'_1} = \frac{1}{f'_{1a}} + \frac{1}{f'_{1b}}$$

Si $f'_{1a} = f'_2$

$$\frac{1}{f'_1} = \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{f'_{1b}} \quad \text{et} \quad f'_{1b} = \frac{f'_1 \cdot f'_2}{f'_2 - f'_1}$$

AN: avec $f'_1 = 5{,}73$ cm
et $f'_2 = -9$ cm

$$f'_{1b} = 3{,}50 \text{ cm.}$$

5). Lorsque que la lentille L_{1b} est accolée à la lentille L_2, le système optique est identique au précédent mais inversé. En vertu du principe du retour inverse, les relations de conjugaison sont toujours vérifiées.
L'image se formera toujours sur le recepteur.
En revanche, le grandissement sera inversé

$$\gamma' = \frac{1}{\gamma} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Le tirage obtenu est donc : $A_4 \rightarrow A_5$.