1. Chambre noire.

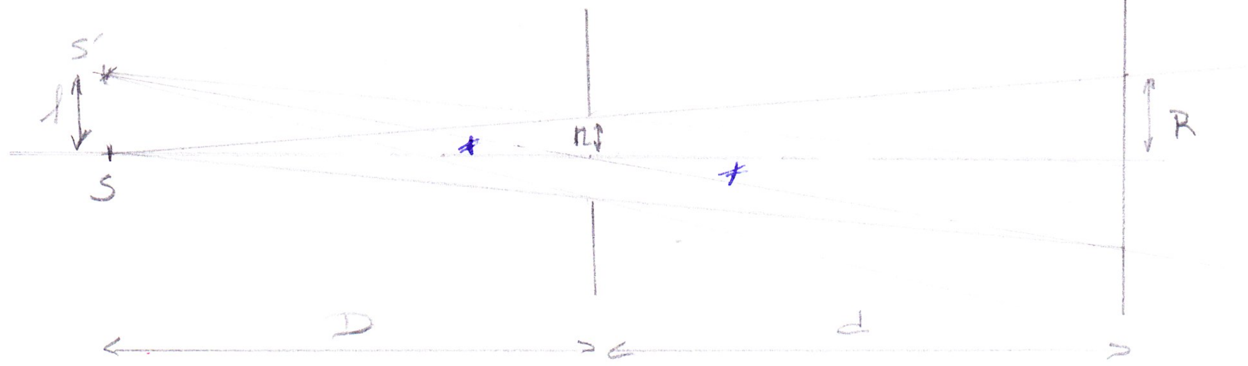
a l'ensemble des rayons lumineux issus de S et passant par le trou forment une tache sur l'écran dont la forme est un disque de rayon R. Thalès nous permet d'écrire.

$$\frac{R}{D+d} = \frac{r}{D} \quad \text{d'où} \quad R = r\left(\frac{D+d}{D}\right)$$

$$R = r\left(1+\frac{d}{D}\right)$$

b La seconde source S' forme une deuxième tache circulaire sur l'écran de même taille que la première. Son centre est décalé d'une distance L également obtenu par Thalès :

$$\frac{l}{D} = \frac{L}{d} \quad \text{soit} \quad L = \frac{l d}{D}.$$



La lumière issue des sources S et S' forme deux disques distincts lorsque $L > 2R$ c'est à dire :

$$\frac{l d}{D} > 2r\left(1+\frac{d}{D}\right) \quad \text{d'où} \quad r < \frac{l d}{2(d+D)}$$

c Si $r \ll \frac{l d}{2(d+D)}$ alors la ligne lumineuse qui joint S à S' sera une ligne sur l'écran.
Dans le cas contraire, on voit une grosse tache de lumière sur l'écran.

2. Réflexion et réfraction à la surface de l'eau.

A l'équateur, les jours sont toujours exactement égaux aux nuits : le soleil se lève à 6 heures (incidence rasante), passe à midi à la verticale (incidence normale) et se couche à 18 heures (incidence rasante). On peut donc que l'angle d'incidence i est proportionnel à l'heure de l'après-midi tandis que le matin, il est proportionnel à 12 heures moins l'heure du soleil. Il suffit ainsi de calculer l'incidence i satisfaisant la relation $i + r = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \sin i &= n \sin r \\ &= n \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) \\ &= n \cos i \end{aligned}$$

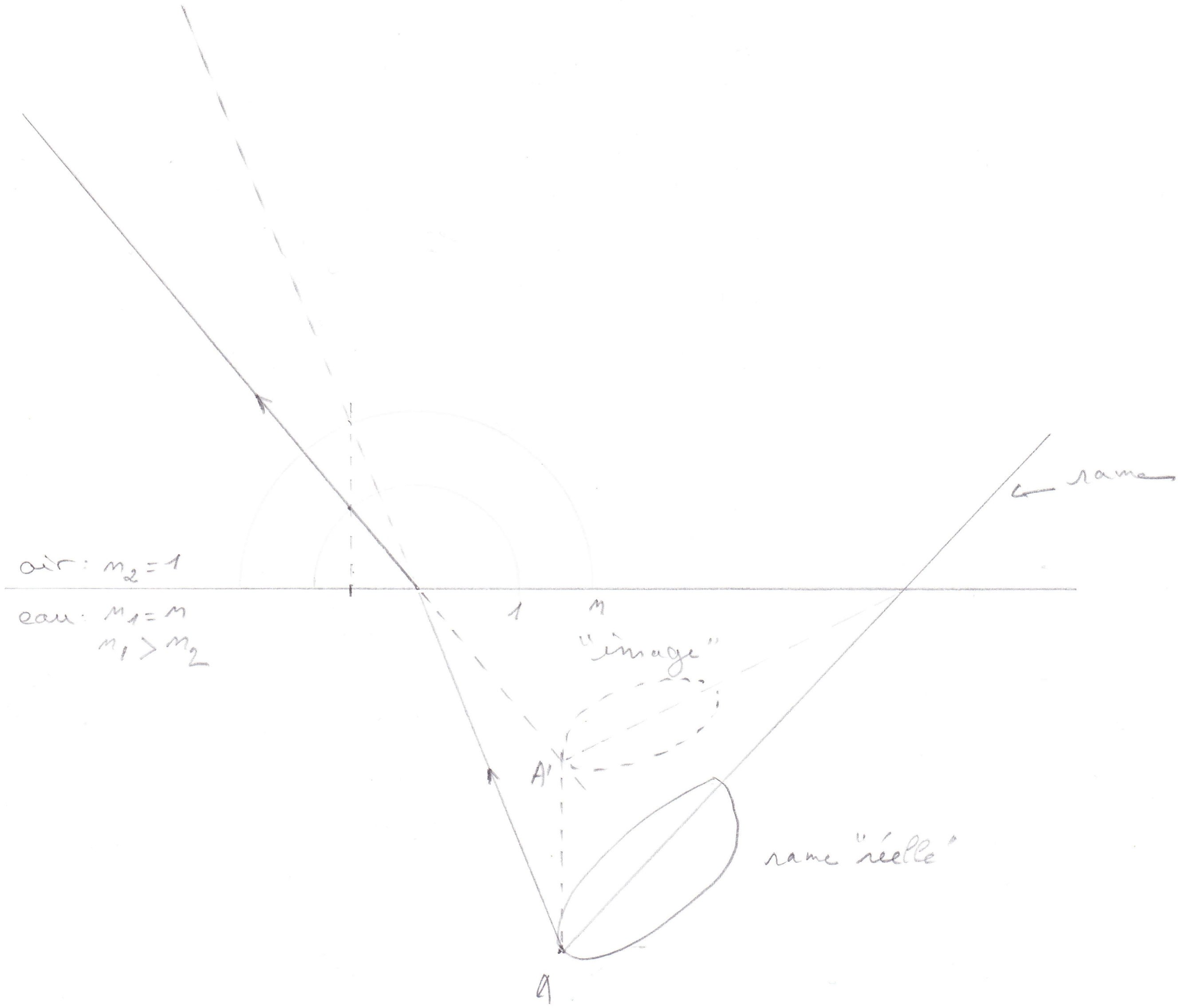
d'où $\frac{\sin i}{\cos i} = \tan i = n$

Avec $n = 1{,}33$, on obtient $i = i' \simeq 53°$

L'après midi : $H = \frac{53}{90} \times 6 = 3{,}53$ soit 3 h 32 min

Le matin : $H' = 12h - 3h32 = 8h28$ min.

3. Exemple de dioptre plan : la rame dans l'eau.



4. Contrôle de niveau d'un réservoir.

a La lumière de la Led ~~arrive~~ avec une incidence à 45° sur le dioptre séparant le verre de l'air dans le réservoir. Or l'angle limite θ_ℓ air-verre est donné par :

$\sin \theta_\ell = \frac{1}{n_1}$ AN: avec $n_1 = 1{,}73$ $\theta_\ell = 35{,}3°$

Il y a donc réflexion totale.

Le rayon réfléchi atteint le second dioptre avec la même incidence à 45° et se réfléchit totalement pour atteindre la photodiode qui fournit ainsi un signal.

b Lorsque le cône trempe dans le liquide, il faut que l'angle limite soit supérieur à 45° pour que le signal cesse et que le niveau soit détecté.

$$\sin \theta_\ell = \frac{n_2}{n_1} > \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d'où $n_2 > \frac{n_1}{\sqrt{2}}$

$n_2 \geq 1{,}22$

Le dispositif est donc pratiquement utilisable pour tous les liquides.

5 Prisme rectangulaire à réflexion totale

Comme les angles sont petits : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin r_1$

devient $i_1 = n r_1$

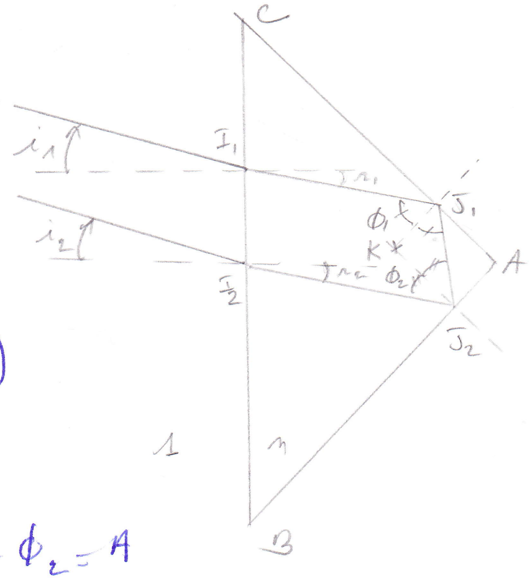
et $i_2 = n r_2$

D'où $i_1 - i_2 = n(r_1 - r_2)$

On voit sur les triangles CI_1J_1 et BI_2J_2 que :

$$\phi_1 + \frac{\pi}{2} = C + r_1 + \frac{\pi}{2}$$

d'où $r_1 = \phi_1 - C$



$$\phi_2 + \frac{\pi}{2} = B + \frac{\pi}{2} - r_2$$

d'où $r_2 = B - \phi_2$

Par conséquent :

$$i_1 - i_2 = n(\phi_1 + \phi_2 - C - B)$$
$$= n(\phi_1 + \phi_2 - \pi + A)$$

soit $i_1 - i_2 = 2n\left(A - \frac{\pi}{2}\right)$

$= 2n\,\varepsilon$ car $\phi_1 + \phi_2 = A$

(triangle $J_1 A J_2$)

Si $A = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ avec $\varepsilon = 1'$ alors $i_1 - i_2 = 3'$

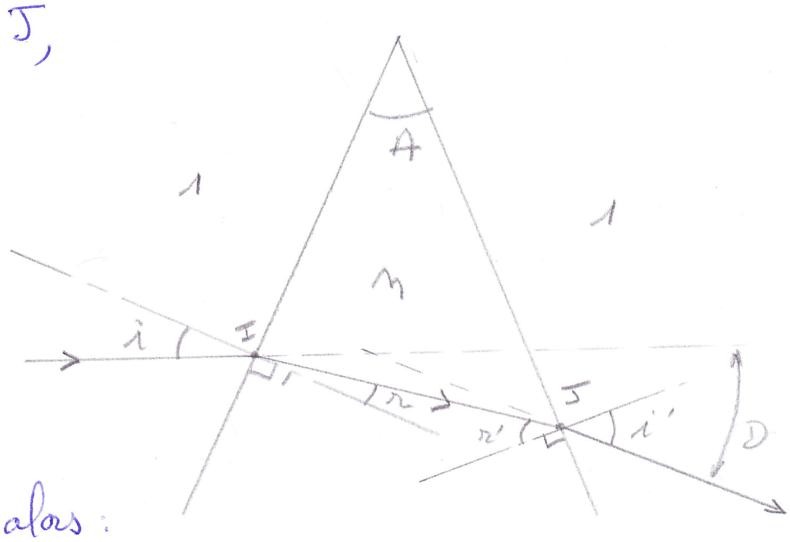
Si $A = \frac{\pi}{2}$ alors $\varepsilon = 0$ et $i_1 - i_2 = 0$.

les rayons incident et émergent sont parallèles.

6 Dispersion de la lumière dans un prisme.

a Dans le triangle AIJ, on observe que :

$A = r + r'$



Si $A = 0$ on a par rapport à la normale au dioptre

$D = i + i'$

si on ouvre A, on obtient alors :

$D = i + i' - A$

A chaque dioptre on a la relation de Descartes-Snell :

$\sin i = n \sin r$ et $\sin i' = n \sin r'$

Pour que la déviation soit minimale il faut que :

$$\frac{dD}{di} = \frac{d}{di}(i + i' - A) = 1 + \frac{di'}{di} = 0 \text{ car } A = c^{ste}.$$

or $d(\sin i) = \frac{d(\sin i)}{di} di = \cos i \, di = n \cos r \, dr$ ①

$d(\sin i') = \cos i' \, di' = n \cos r' \, dr'$ ②.

de plus $dr + dr' = 0$. ③

De ① on déduit que $di = n \dfrac{\cos r}{\cos i} dr$.

De ② on déduit que $di' = n \dfrac{\cos r'}{\cos i'} dr'$

Et de ③ on déduit que $\dfrac{dr'}{dr} = -1$.

$$\text{D'où} \quad 1 + \frac{di'}{di} = 1 + n \frac{\cos r'}{\cos i'} dr' \times \frac{\cos i}{n \cos r} \frac{1}{dr}$$

$$= 1 - \frac{\cos r' \cos i}{\cos i' \cos r}$$

Donc si $1 + \dfrac{di'}{di} = 0$ alors $\dfrac{\cos r' \cos i}{\cos i' \cos r} = 1$

D'où $\cos r' \cdot \cos i = \cos i' \cos r$.

$$\cos^2 r' \cos^2 i = \cos^2 i' \cos^2 r$$

$$(1-\sin^2 r')(1-\sin^2 i) = (1-\sin^2 i')(1-\sin^2 r).$$

$$(1-\sin^2 r')(1-n^2\sin^2 r) = (1-n^2\sin^2 r')(1-\sin^2 r)$$

et donc $(n^2-1)(\sin^2 r - \sin^2 r') = 0$.

Finalement on a $r = \pm r'$

Mais comme $r + r' = A$ on ne peut avoir que $r = r'$

Et par conséquent $i = i'$

Au minimum de déviation, on a donc :

$$r = r' = \frac{A}{2}$$

$$i = i' = i_m$$

$$D_m = 2 i_m - A.$$

b $\sin i = n \sin r$ et donc au minimum de déviation on obtient :

$$n = \frac{\sin i_m}{\sin r_m} = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

Pour le rouge, on a ainsi $n_R = 1,510$.

c Comme les indices de réfraction sont proches on peut procéder en différenciant :

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot n = \sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) dn = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{D_m + A}{2}\right) dD_m$$

et donc $dD_m = \dfrac{2\sin(A/2)}{\cos\left(\frac{D_m+A}{2}\right)} dn$.

AN : $dD_m = 3,93\ 10^{-3}$ rad soit $dD_m = 13'32''$

et donc $D_m = 16°00'38'' + 13'32''$

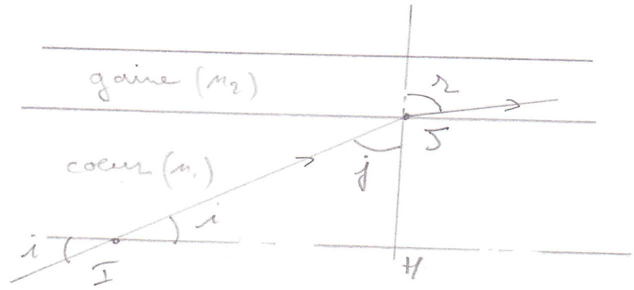
$$D_m = 16°14'10''$$

7. Fibre à gradient d'indice

a) La réfraction limite en J est donnée par :

$$n_1 \sin j = n_2 \sin r$$

et $r = 90°$ d'où



$$\sin j \geq \frac{n_2}{n_1} = \sin j_{lim}$$

On voit que le triangle IJH permet d'écrire :

$$i + j + \frac{\pi}{2} = \pi$$

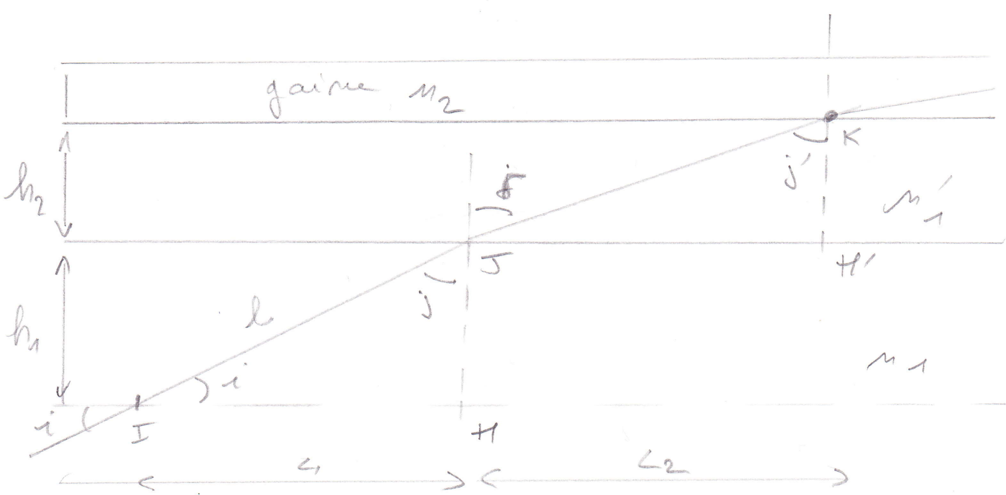
$$i = \frac{\pi}{2} - j \quad \text{soit} \quad i \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = i_{lim}$$

Pour toute valeur de i inférieure à i_{lim}, il y a réflexion totale : la lumière est guidée dans la fibre optique.

AN: $n_1 = 1,5$ et $n_2 = 1,3$ donc $i_{lim} = 29,9°$.

b) Pour que le rayon se propage uniquement dans le milieu d'indice n_1, il faut qu'il y ait réflexion totale en J. Une démonstration analogue à la question 1) amène à :

$$i_{lim}^{(J)} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n'_1}{n_1}\right) \qquad \text{AN: } i_{lim}^{(J)} = 21,04°.$$



Le faisceau qui pénètre dans la couche d'indice n_1 se propage dans la fibre s'il y a réflexion totale en K. On a aux conditions limites :

$$n'_1 \sin j_{lim} = n_2 \quad \text{soit} \quad \sin j'_{lim} = \frac{n_2}{n'_1}$$

Si r est l'angle de réfraction en J, $r = j'$

soit $j'_{lim} = r_{lim}$ et $n_1 \sin j_{lim} = n'_1 \sin r_{lim} = n_2$

d'où $j_{lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

De plus $i = \frac{\pi}{2} - j$ donc $i_{lim}^{(K)} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

AN : $i_{lim}^{(K)} = 29{,}9°$

Il y a réflexion totale si i est inférieur à cette valeur.

Ainsi la fibre à gradient d'indice ne permet pas à plus de lumière d'être guidée que la fibre ordinaire.

Par contre, pour $i < 21{,}04°$, il y a réflexion totale dans la partie la plus centrale. Le rayon est donc guidé dans une zone plus confinée de la fibre.

c) Le temps de parcours de chaque faisceau est donné par le rapport entre la distance parcourue et la vitesse de propagation dans la fibre. On remarque que :

$\cos i = \frac{L}{l}$ et donc que $\frac{l}{L} = \frac{1}{\cos i}$

où l est la distance parcourue et L sa projection sur l'axe

- Pour un rayon 1 qui suit l'axe de la fibre :

$$v_1 = \frac{c_1}{n_1} \quad \text{donc} \quad t_1 = \frac{L}{v_1} = \frac{L}{c} n_1$$

- Pour un rayon 2 :

$$t_2 = \frac{l}{v_1} = \frac{L}{\cos i} \frac{n_1}{c}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L n_1}{c}\left(\frac{1}{\cos i} - 1\right)$$

Δt étant positif, le rayon 2 est donc en retard.

<u>AN</u> : $i = 25°$; $n_1 = 1{,}5$ d'où $\Delta t = 0{,}155 \frac{L}{c}$

d) Dans la fibre à gradient d'indice, le rayon 1 met toujours un temps $t_1 = \frac{L n_1}{c}$ avec $L = L_1 + L_2$

Le rayon 2 parcourt une distance l_1 dans le milieu d'indice n_1 et l_2 dans le milieu d'indice n'_1

On a toujours :

$$l_1 = \frac{L_1}{\cos i} \quad \text{et} \quad l_2 = \frac{L_2}{\cos \alpha} = \frac{L_2}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - r\right)} = \frac{L_2}{\sin r}$$

comme $j = \frac{\pi}{2} - i$ et $n_1 \sin j = n'_1 \sin r$ alors :

$$l_2 = \frac{L_2}{\sin r} = \frac{L_2}{\frac{n_1}{n'_1} \sin j} = \frac{n'_1}{n_1} \frac{L_2}{\cos i}$$

Pour parcourir la longueur de la fibre, le rayon 2 met un temps t_2 tel que :

$$t_2 = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{1}{\cos i}\left(L_1 n_1 + L_2 \frac{n_1'^2}{n_1}\right)\frac{1}{c}$$

On a donc

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{n_1 \cos i}\left(L_1 n_1^2 + L_2 n_1'^2\right)\frac{1}{c} - \frac{L n_1}{c}$$

Exprimons L_1 et L_2 en fonction de h_1 et h_2 puis de L. Si $h_1 = JH$ et $h_2 = H'K$ on a :

$$\tan i = \frac{h_1}{L_1} \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - r\right) = \frac{1}{\tan r} = \frac{h_2}{L_2}$$

d'où $\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{\tan i \tan r}$ car $h_1 = h_2$

$L_1 + L_2 = L$ donc $L_2 = \dfrac{L}{\left(1 + \dfrac{1}{\tan i \tan r}\right)}$

et $L_1 = \dfrac{L}{1 + \tan i \tan r}$

$n_1 \sin j = n'_1 \sin r$ d'où $\sin r = \dfrac{n_1}{n'_1} \sin j$

$\sin r = \dfrac{n_1}{n'_1} \cos i$

d'où $r = 76,18°$ quand $i = 25°$

$L_2 = 0,6546\, L$

$L_1 = 0,3454\, L$

donc $t_2 = 0,5717 \frac{L}{c} + 0,9438 \frac{L}{c} = 1,5155 \frac{L}{c}$

or $t_1 = 1,5 \frac{L}{c}$ d'où $\Delta t = 0,0155 \frac{L}{c}$.

Le rayon 2 est en retard sur le rayon 1 d'une quantité Δt 10 fois plus petite que dans le cas de la fibre ordinaire. En sortie de la fibre, les différents rayons correspondant à des incidences différentes arrivent donc dans un intervalle de temps plus court.