Chapter 1

Courbes paramétrées

1.1 Rappels

Pour devoir utiliser moins de place, nous allons noter un vecteur $u = (u_1, \dots, u_n$, mais en réalité cela reste un matrice avec n lignes et 1 colonne. De même pour les points, les courbes,...

Nous regardons $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire habituel

$$u.v =< u, v >= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i,$$

et sa norme associée

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} = \sqrt{< u, u >}.$$

En plus le cosinus de l'angle entre les vecteurs u et v est donné par

$$cos\angle(u, v) = \frac{< u, v >}{\|u\|\|v\|},$$

où $u \neq 0 \neq v$.

Remarque que l'inégalité de Cauchy Schwartz et la définition de l'angle implique que

$$| < u, v > | \leq \|u\| \quad \|v\|$$

avec égalité si et seulement si les vecteur u et v sont colinéaires.

1.2 Courbes paramétrées

Définition 1 On appelle **courbe dans $\mathbb{R}^n$** toute application continue

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n : t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

(i) on dira que γ est de **classe** C^1 si les fonctions $\gamma_i(t)$ sont de classe C^1 (dérivable avec dérivée continue)

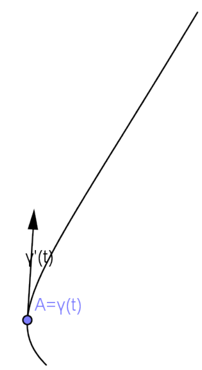
(ii) dans ce cas

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$$

est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Nous appelons ce vecteur le vecteur vitesse (ou le vecteur dérivée) au point $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$.

(iii) si $\gamma'(t_0) \neq 0$, on dira que γ est régulière au point t_0. Nous appelons la droite passant par $\gamma(t_0)$ avec vecteur tangent directeur $\gamma'(t_0)$ la tangente en t_0.

(iv) Nous disons qu'une courbe est régulière si et seulement si elle est régulière en chaque point.



On remarque que nous appelons une courbe de classe C^r si les dérivées de toutes les composantes jusqu'à l'ordre r existent et sont continues. Nous appelons une courbe de classe C^∞ si les dérivées de toutes les composantes de n'importe quel ordre existent.

Sauf si indiqué autrement on va supposer que toutes les fonctions et toutes les courbes sont de classe C^∞.

Définition 2 Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n : t \mapsto \alpha(t)$ une courbe et $h : J \subset \mathbb{R} \mapsto I \subset \mathbb{R}$ un difféomorphisme. Alors nous appelons la courbe

$$\beta : J \to \mathbb{R}^n : s \mapsto \beta(s) = \alpha(h(s))$$

une reparamétrisation de la courbe α.

1.3 Points singuliers

Dans ce chapitre on va d'abord étudier une courbe de classe C^∞ localement dans le plan. Ici on ne suppose pas que la courbe est régulière. Soit $t_0 \in I$ et soit $\delta > 0$ telle que $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset I$. Supposant qu'il existe un $n > 0$ telle que

$$\gamma^{(n)}(t_0) \neq 0,$$

et appelons p le plus petit entier strictement positif avec cette propriété.

Supposant aussi qu'il existe un entier $n > 0$ telle que $\gamma^{(n)}(t_0)$ et $\gamma^{(p)}(t_0)$ sont indépendant et appelons q le plus petit entier strictement positif avec cette propriété.

Trivialement on a $q > p$. Nous posons:

$$\begin{aligned}
&u = \gamma^{(p)}(t_0) \\
&v = \gamma^{(q)}(t_0) \\
&\gamma^{(i)}(t_0) = a_i u, \quad \text{pour} \quad p < i < q.
\end{aligned}$$

Utilisons maintenant le repère $\gamma(t_0), u, v$ pour représenter la courbe. Remarque que ce repère n'est pas nécessairement un repère orthonormé. Alors on a dans un voisinage de t_0:

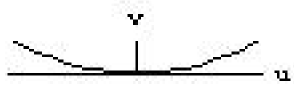
$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + x(h)u + y(h)v,$$

où

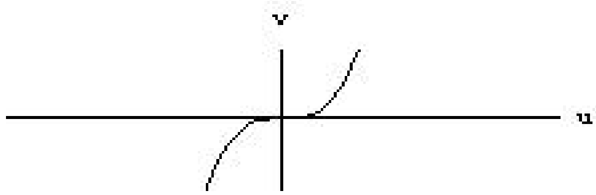
$$\begin{aligned}
x(h) &= \frac{h^p}{p!} + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}a_{p+1} + \cdots + \frac{h^{q-1}}{(q-1)!}a_{q-1} + o(h^q) \\
y(h) &= \frac{h^q}{q!} + o(h^q).
\end{aligned}$$

Nous appelons la droite qui passe par $\gamma(t_0)$ et avec vecteur directeur u la tangente à la courbe. Quatre cas sont possibles:

(i) p est impair et q est pair

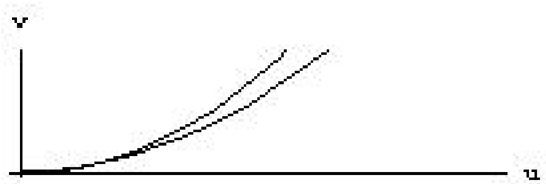


(ii) p et q sont impairs (Nous appelons le point un point d'inflexion)



(iii) p pair et q impair (Nous appelons le point un point de rebroussement de 1ère espèce)

(iv) p et q sont pairs (Nous appelons le point un point de rebroussement de 2ième espèce)



Pour motiver les images précédentes, nous rappelons que

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + x(h)u + y(h)v,$$

ou

$$x(h) = \frac{h^p}{p!} + o(h^p) \qquad y(h) = \frac{h^q}{q!} + o(h^q)$$

Il suit que pour h suffisement petit

1. Si p et q sont pairs $x(h) > 0$ et $y(h) > 0$

2. Si p est pair et q est impair que $x(h) > 0$ pour tout h et $y(h) > 0$ pour $h > 0$ et $y(h) < 0$ pour $h < 0$

3. Si p est impair et q est pair que $y(h) > 0$ pour tout h et $x(h) > 0$ pour $h > 0$ et $x(h) < 0$ pour $h < 0$

4. Si p et q sont impairs $x(h) > 0$ et $y(h) > 0$ pour $h > 0$ et $x(h) < 0$ et $y(h) < 0$ pour $h < 0$

Aussi

$$\gamma'(t_0 + h) = (\frac{h^{p-1}}{(p-1)!} + o(h^{p-1}))u + (\frac{h^{q-1}}{(q-1)!} + o(h^{q-1}))v$$

Il suit que

$$\|\gamma'(t_0 + h)\| = |(\frac{h^{p-1}}{(p-1)!})|\|(1 + o(1))u + (\frac{h^{q-p}}{(q-p)!} + o(h^{q-p}))v\|$$

Donc nous voyons que, si $p > 1$ que

$$\lim_{t \to 0} \gamma'(t_0 + h) = 0,$$

mais que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\gamma'(t_0 + h)}{\|\gamma'(t0 + h)\|} = \lim_{t \to 0} (\frac{t}{|t|})^{p-1} \frac{u}{\|u\|}$$

Donc nous voyons que si

1. Si p est impair que le vecteur tangent unitaire tend vers $\frac{u}{\|u\|}$

2. Si p est pair que le vecteur tangent unitaire tend vers $\frac{u}{\|u\|}$ si $h > 0$ et vers $\frac{u}{\|u\|}$ si $h < 0$.

1.4 Tangentes horizontales et verticales

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ une courbe. et soit $a \in I$. Alors

Définition 3 La courbe γ a une tangente horizontale en $\gamma(a)$ si et seulement si

$$x'(a) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad y'(a) = 0$$

Définition 4 La courbe γ a une tangente verticale en $\gamma(a)$ si et seulement si

$$x'(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad y'(a) \neq 0$$

1.5 Branches infinies

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe. Nous allons supposer que I s'écrit comme

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n,$$

où $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sont des intervalles ouverts.

Prenons un de ses intervalles I_k et soit t_0 un des points du bord de I_k (ici t_0 peut être éventuellement $\pm\infty$). Nous allons étudier ce qui se passe avec la courbe si nous prenons $\lim_{t \mapsto t_0, t \in I_k} \gamma(t)$.

Attention il faut éventuellement regarder séparément la limite à gauche et la lmite à droite. Il y a des cas dans lequel cela nous donnent des réponses différentes

Par exemple pour la courbe

$$\gamma(t) = (\sqrt{1+t^2}t, t),$$

défini sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ il faut étudier les limites suivantes:

1. $t \mapsto -\infty$
2. $t \mapsto 0, t \leq 0$
3. $t \mapsto 0, t \geq 0$
4. $t \mapsto +\infty$

Définition 5 On dit que γ présente une branche infinie lorsque $t \to t_0$, $t \neq t_0$ si et seulement si il existe un point w fixe telle que

$$\lim_{t \to t_0} d(w, \gamma(t)) = +\infty$$

Cette définition est évidemment indépendante du choix du point w, car

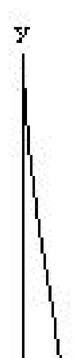
$$d(w, \gamma(t)) - d(u, w) \leq d(u, \gamma(t)).$$

Nous voyons aussi que si une courbe a une branche infinie au moins une des deux composantes doit tendre vers $\pm\infty$ aussi car on a

$$d(w, \gamma(t)) = \sqrt{(w_1 - \gamma_1(t))^2 + (w_2 - \gamma_2(t))^2}.$$

Exemple 1 Regardons

$$\gamma :]0, 1[\to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma(t) = (t, \frac{1}{t})$$



Cette courbe a une branche infini quand donc

$t \to 0$. En effet nous avons $\lim_{t\to 0} d(O,\gamma(t)) = +\infty.$

$$d(O,\gamma(t)) = \sqrt{t^2 + \tfrac{1}{t^2}}$$

Définition 6 Soit Δ un vecteur directeur unitaire d'une droite dans $\mathbb{R}^2$. On dit qu'une branche infinie de γ admet Δ comme **direction asymptotique** si $\lim_{t\mapsto t_0} \frac{\overrightarrow{w\gamma(t)}}{\|\overrightarrow{w\gamma(t)}\|} = \pm\Delta$, avec w un point quelconque. Cette propriété est indépendante du choix de w.

Preuve:

Remarque qu'on est obligé ici de travailler avec un vecteur directeur normalisé parce que comme γ a une branche infini au moins un des composantes du vecteur $w - \gamma(t)$ tend vers $\pm\infty$.

Alors nous avons:

$$\lim_{t\to t_0} \frac{w-\gamma(t)}{\|w-\gamma(t)\|} = \Delta$$

Comme la courbe a une branche qui tend vers l'infini on a aussi

$$\lim_{t\to t_0} \frac{w}{\|w-\gamma(t)\|} = 0$$

Ce qui implique que

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)}{\|w-\gamma(t)\|} = \Delta$$

Prenant maintenant un autre vecteur u et regardons

$$A(t) = \left\| \frac{\gamma(t)}{\|u-\gamma(t)\|} - \frac{\gamma(t)}{\|w-\gamma(t)\|} \right\|$$

Nous avons

$$
\begin{aligned}
A(t) &= \frac{\|\gamma(t)\| \quad | \quad \|w-\gamma(t)\| - \|u-\gamma(t)\| \quad |}{(\|w-\gamma(t)\|)(\|u-\gamma(t)\|)} \\
&\leq \|(w-u)\| \frac{\|\gamma(t)\|}{(\|w-\gamma(t)\|)} \frac{1}{(\|u-\gamma(t)\|)}
\end{aligned}
$$

Comme

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\|\gamma(t)\|}{(\|w-\gamma(t)\|)} = 1,$$

et

$$\lim_{t\to t_0} \frac{1}{(\|u-\gamma(t)\|)} = 0$$

nous trouvons par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{t\to t_0} A(t) = 0$$

∎

Théorème 1 *La courbe* $\gamma = (x(t), y(t))$ *a une direction asymptotique lorsque* $t \to t_0$, $t \neq t_0$ *si et seulement si*

$$\left|\frac{y(t)}{x(t)}\right|$$

a une limite finie ou égale à $+\infty$ *lorsque* $t \to t_0$, $t \neq t_0$.

Preuve: Comme on a vu que la définition est indépendent du choix du point w, nous pouvons prendre pour w l'origine. En argumentant comme dans la preuve précédente nous avons que une branche infinie admet une droite asymptotique si et seulement si la limite suivante

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$$

existe. Dans ce cas sa valeur donne un vecteur directeur.

Utilisant les composantes nous trouvons que on peut trouver une branche asymptotique si et seulement si

$$\lim_{t\to t_0} \frac{(x(t), y(t))}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}$$

existe.

Supposant maintenant d'abord que la limite existe. Comme pour chaque t on a un vecteur unitaire aussi la limite est un vecteur de norme 1. Appelons ce vecteur (Δ_1, Δ_2). Supposons d'abord que $\Delta_2 \neq 0$. Dans ce cas nous trouvons

$$\lim_{t\to t_0} \frac{x(t)}{y(t)} = \tfrac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

Dans l'autre cas nous trouvons

$$\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \tfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

Pour montrer le sens inverse. On suppose d'abord que

$$\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}$$

Comme la courbe a une branche qui tend vers l'infini cela implique que pour t suffisamment proche de t_0 nous avons

(i) $x(t)^2 + y^2(t) \neq 0$

(ii) $x(t)$ ne change pas de signe

Alors nous trouvons

$$\frac{y(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} = \frac{y(t)}{|x(t)|} \frac{1}{\sqrt{(y(t)/x(t))^2 + 1}}$$

d'où suit

$$\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} = \pm 1 \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

Aussi

$$\frac{x(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} = \frac{x(t)}{|x(t)|} \frac{1}{\sqrt{(y(t)/x(t))^2 + 1}}$$

d'où suit

$$\lim_{t\to t_0} \frac{x(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+1}}$$

Finalement on regarde le cas que

$$\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty$$

Dans ce cas

$$\lim_{t\to t_0} \frac{x(t)}{y(t)} = 0$$

et nous procédons comme dans le cas précédent. ∎

Nous remarquons qu'il suit de la preuve que si

$$\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a,$$

alors $(1, a)$ est une direction asymptotique.

Exemple 2 La courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, \sin t)$ a deux branches infinies pour $t \to \pm\infty$. En plus la direction $(1, 0)$ est une direction asymptotique, car la limite

$$lim_{t\to\pm\infty} \frac{sint}{t} = 0$$

Exemple 3 La courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, t\sin t)$ a deux branches infinies pour $t \to \pm\infty$.

Mais la courbe n'a pas de direction asymptotique, car la limite

$$lim_{t\to\pm\infty}\frac{tsint}{t}$$

n'existe pas.

1.6 Droites asymptotiques

Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe qui admet une branche infinie en t_0.

Définition 7 Nous disons qu'une droite $\mathcal{D}$ est une asymptote pour la courbe si et seulement si

$$\lim_{t\to t_0} d(\mathcal{D}, \gamma(t)) = 0.$$

Proposition 1 *Soit $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)$ une direction unitaire de la courbe α. Alors α a une asymptote avec vecteur directeur $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)$ si et seulement si*

$$\lim_{t\to t_0} < (-\Delta_2, \Delta_1), \alpha(t) > \in \mathbb{R}$$

Preuve: Une droite avec vecteur directeur Δ a comme équation $-\Delta_2 x + \Delta_1 y = b$, où $b \in \mathbb{R}$. La distance entre un point $\gamma(t)$ et la droite est alors donnée par

$$d(\gamma(t), \mathcal{D}) = |-\Delta_2\alpha_1(t) + \Delta_1\alpha_2(t) - b|,$$

où nous avons utilisé le fait que Δ est un vecteur unitaire. En prenant la limite nous voyons que la droite $\mathcal{D}$ est une asymptote si et seulement si $-\Delta_2\alpha_1(t) + \Delta_1\alpha_2(t)$ converge vers b.

∎

Proposition 2 *Si $\mathcal{D}$ est une droite asymptotique d'une courbe avec vecteur unitaire Δ. Alors $\pm\Delta$ est une direction asymptotique.*

Preuve: On a

$$\lim_{t\to t_0} -\Delta_2\alpha_1(t) + \Delta_1\alpha_2(t) = b$$

Nous prenons pour w l'origine. Donc pour montrer que Δ est une direction asymptotique il faut calculer

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|}.$$

D'abord on remarque que si nous prenons $\Delta^\perp = (-\Delta_2, \Delta_1)$ nous pouvons écrire

$$\alpha = <\alpha, \Delta> \Delta + <\alpha, \Delta^\perp> \Delta^\perp$$

Comme

$$\lim_{t\to t_0} -\Delta_2\alpha_1(t) + \Delta_1\alpha_2(t) = b$$

et la courbe a une branche infinie il suit que $| <\alpha, \Delta> |$ tend vers l'infini. En particulier ce terme ne change plus de signe pour t suffisamment proche de t_0. Donc on a

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0} \frac{\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|} &= \lim_{t\to t_0} \frac{(<\alpha, \Delta> \Delta + <\alpha, \Delta^\perp> \Delta^\perp)}{\sqrt{<\alpha, \Delta>^2 + <\alpha, \Delta^\perp>^2}} \\
&= \lim_{t\to t_0} \frac{(<\alpha, \Delta> \Delta + b\Delta^\perp)}{\sqrt{<\alpha, \Delta>^2 + b^2}} \\
&= \lim_{t\to t_0} \left(\frac{<\alpha, \Delta> \Delta}{\sqrt{<\alpha, \Delta>^2 + b^2}} + \frac{b\Delta^\perp}{\sqrt{<\alpha, \Delta>^2 + b^2}} \right) \\
&= \lim_{t\to t_0} \frac{<\alpha, \Delta> \Delta}{\sqrt{<\alpha, \Delta>^2 + b^2}} \\
&= \lim_{t\to t_0} \frac{<\alpha, \Delta>}{| <\alpha, \Delta> |} \Delta \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{<\alpha, \Delta>}\right)^2}} \\
&= \pm\Delta.
\end{aligned}$$

∎

Nous finissons cette section par quelques calculs explicites. Posons:

$$m = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

On va consider plusieurs cas:

(i) $x(t) \to x_0 \in \mathbb{R}$ et $|y(t)| \to \infty$. Dans se cas le vecteur $(0,1)$ est une direction asymptotique et la droite $x = x_0$ est une asymptote de la courbe.

(ii) $|x(t)| \to +\infty$ et $y(t) \to y_0$. Dans se cas le vecteur $(1,0)$ est une direction asymptotique et la droite $y = y_0$ est une asymptote de la courbe.

(iii) $|x(t)| \to +\infty$ et $|y(t)| \to \infty$. Dans ce cas, tout dépend de la valeur de m.

1. $m = 0$, α admet une direction asymptotique $(0,1)$
2. $m = +\infty$, α admet une direction asymptotique $(1,0)$
3. $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$. Alors α admet comme direction asymptotique $(1,m)$. En plus α admet une asymptote si et seulement si la limite $\lim_{t \to t_0}(\alpha_2(t) - m\alpha_1(t))$ existe. Si cela est le cas, l'équation de l'asymptote est donnée par

$$-mx + y = \lim_{t \to t_0}(\alpha_2(t) - m\alpha_1(t))$$

Si une courbe a une direction asymptotique, qui n'admet pas d'asymptote nous disons que la courbe admet une branche parabolique.

1.7 Etudes des courbes

On va maintenant utiliser ce que nous avons vue dans la section précédente pour faire des dessins d'une courbe.

Exemple 4 Nous regardons la courbe

$$\gamma(t) = (\frac{t^2+t+1}{t+1}, \frac{t^2-1}{2-t}).$$

1. Nous calculons d'abord les asymptotes. Il faut regarder les paramètres $t = -1, 2, \pm\infty$.

   En $t = -1$, nous avons que

   $$\lim_{t \to -1} |x(t)| = +\infty$$
   $$\lim_{t \to -1} y(t) = 0.$$

   Cela implique que la droite $y = 0$ est asymptote aussi bien en $t < -1$, $t \nearrow -1$ que en $t > -1$, $\searrow -1$.

   En $t = 2$, nous avons que

   $$\lim_{t \to 2} |y(t)| = +\infty$$
   $$\lim_{t \to 2} x(t) = \frac{7}{3}.$$

   Cela implique que la droite $x = \frac{7}{3}$ est asymptote aussi bien en $t < 2$, $t \nearrow 2$ que en $t > 2$, $\searrow 2$.

En $t = \pm\infty$, nous avons que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\pm\infty} |y(t)| &= +\infty \\
\lim_{t\to\pm\infty} |x(t)| &= +\infty \\
\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} &= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{\frac{t^2-1}{2-t}}{\frac{t^2+t+1}{1+t}} \\
&= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{(t-1)(t+1)^2}{(t^2+t+1)(2-t)} \\
&= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t^3(1-\frac{1}{t})(1+\frac{1}{t})^2}{t^3(1+\frac{1}{t}+(\frac{1}{t})^2)(2\frac{1}{t}-1)} \\
&= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{(1-\frac{1}{t})(1+\frac{1}{t})^2}{(1+\frac{1}{t}+(\frac{1}{t})^2)(2\frac{1}{t}-1)} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Donc nous voyons que $m = 1$ et pour calculer s'il y a un asymptote il faut calculer

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\pm\infty} y(t) - mx(t) &= \lim_{t\to\pm\infty} y(t) + x(t) \\
&= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t^2-1}{2-t} + \frac{t^2+t+1}{1+t} \\
&= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{(t^2-1)(1+t) + (t^2+t+1)(2-t)}{(2-t)(1+t))} \\
&= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t^2-1+t^3-t+(2t^2+2t+2)-t^3-t^2-t}{(2-t)(1+t))} \\
&= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2t^2+1}{(2-t)(1+t))} \\
&= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2+(\frac{1}{t})^2}{(2-\frac{1}{t})(1+\frac{1}{t}))} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Cela implique que la droite $y + x = 2$ est une asymptote en $t = \pm\infty$.

2. Après nous regardons les points singuliers et les points avec une tangente verticale ou horizontale. Pour pouvoir faire cela nous devons calculer:

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (x'(t), y'(t)) \\
&= (\frac{(2t+1)(1+t)-(t^2+t+1)}{(1+t)^2}, \frac{2t(2-t)+(t^2-1)}{(2-t)^2}) \\
&= (\frac{2t^2+3t+1-(t^2+t+1)}{(1+t)^2}, \frac{4t-2t^2+(t^2-1)}{(2-t)^2}) \\
&= (\frac{t^2+2t}{(1+t)^2}, \frac{4t-t^2-1)}{(2-t)^2}) \\
&= (\frac{t(t+2)}{(1+t)^2}, -\frac{t^2-4t+1)}{(2-t)^2})
\end{aligned}$$

Nous concluons que

(a) Il n'y a pas de points singuliers.

(b) Il y a des tangentes verticales

$$t = 0 \qquad \text{point:}(1, -\tfrac{1}{2})$$
$$t = -2 \qquad \text{point:}(-3, \tfrac{3}{4})$$

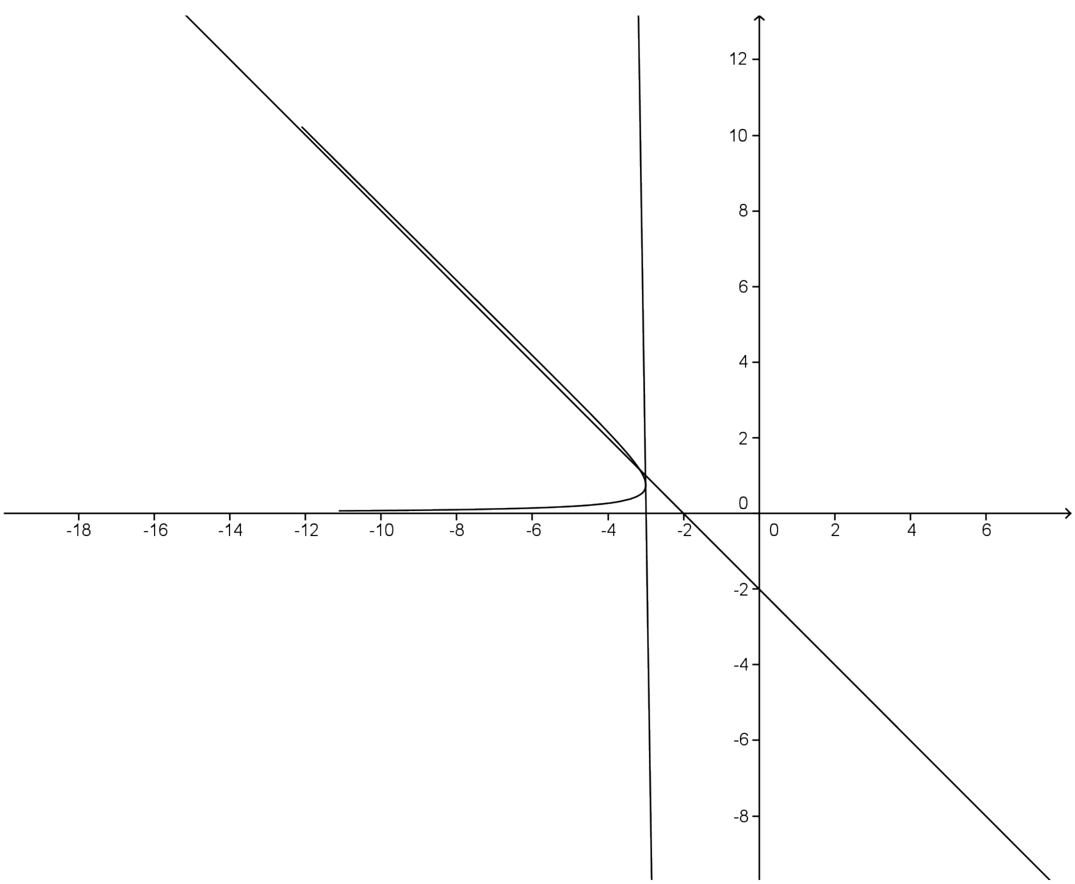
(c) Il y a des tangentes horizontales

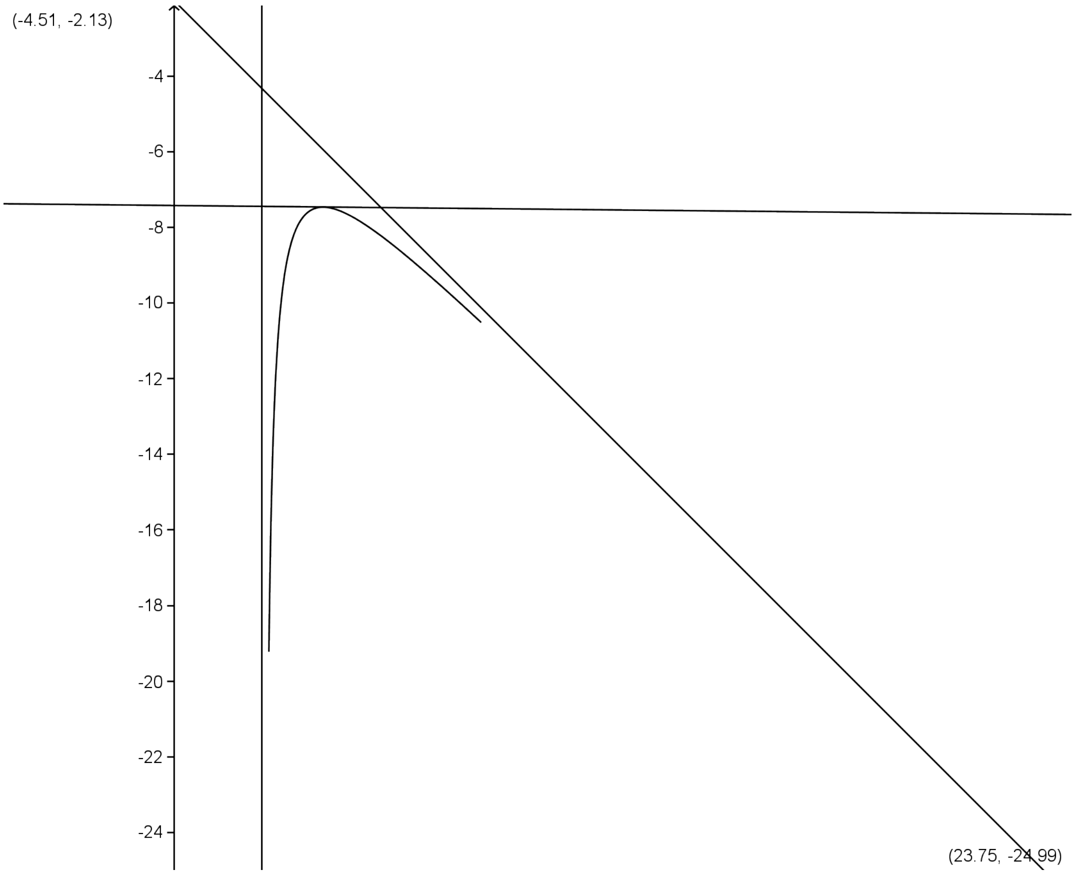
$$t = 2+\sqrt{3} \qquad \text{point:}(\frac{10+5\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}, \frac{6+4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}})$$
$$t = 2-\sqrt{3} \qquad \text{point:}(\frac{10-5\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}, \frac{6-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}})$$

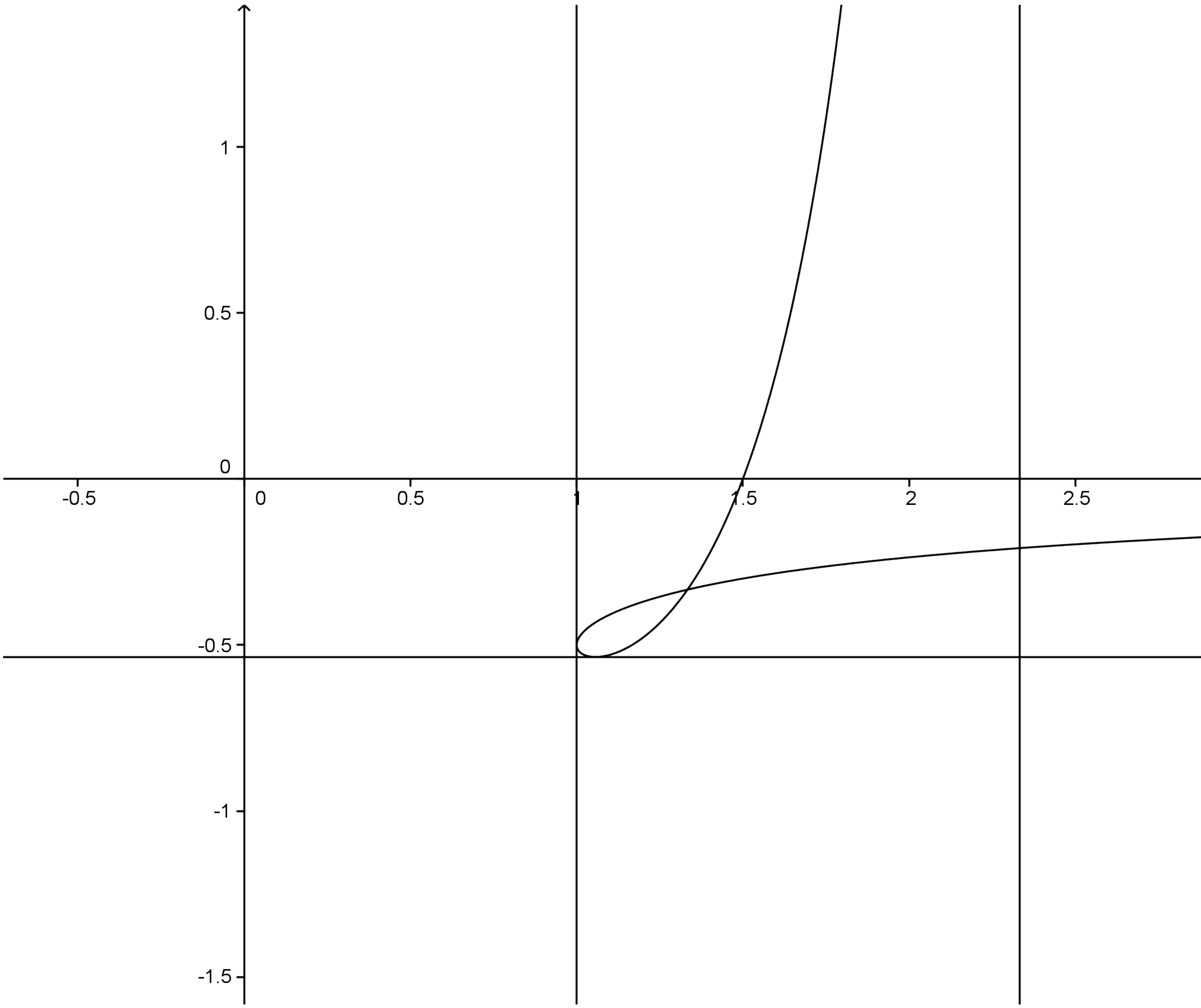
3. Nous avons dons le tableau de variation suivante:

t	$-\infty$		-2		-1		0		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty^{+\infty}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty_{-\infty}$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

Cela donne les dessins suivants sur respectivement $]-\infty,-1[$, $]-1,2[$ et $]2,+\infty[$.




(-4.51, -2.13)
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
(23.75, -24.99)



Exemple 5 Nous regardons la courbe

$$\gamma(t) = (\frac{t^2+1}{2t}, \frac{2t-1}{t^2}).$$

1. Nous calculons d'abord les asymptotes. Il faut regarder les paramètres $t = 0$, $t = \pm\infty$.

En $t = 0$, nous avons que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} |x(t)| &= +\infty \\
\lim_{t\to 0} |y(t)| &= +\infty \\
\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{x(t)} &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2t-1}{t^2}}{\frac{t^2+1}{2t}} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(2t-1)2t}{(t^2+1)t^2} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2(2t-1)}{(t^2+1)t} \\
&= -2 \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \\
&= \pm\infty
\end{aligned}$$

D'où il n'y pas d'asymptote en $t = 0$. Le vecteur $(1, 0)$ est une direction asymptotique.

En $t = \pm\infty$, nous avons que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\pm\infty} |x(t)| &= +\infty \\
\lim_{t\to\pm\infty} |y(t)| &= 0
\end{aligned}$$

Nous concluons que la droite $y = 0$ est une asymptote à la courbe.

2. Après nous regardons les points singuliers et les points avec une tangente verticale

ou horizontale. Pour pouvoir faire cela nous devons calculer:

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (x'(t), y'(t)) \\
&= (\frac{4t^2 - 2(t^2+1)}{4t^2}, \frac{2t^2 - 2t(2t-1)}{t^4}) \\
&= (\frac{t^2-1}{2t^2}, \frac{2-2t}{t^3}) \\
&= (\frac{(t-1)(t+1)}{2t^2}, \frac{2(1-t)}{t^3})
\end{aligned}$$

Nous concluons que

(a) Pour $t = 1$ nous trouvons le point singulier $(1, 1)$. Nous pouvons encore regarder le comportement quand $t = -1$ du vecteur tangent normalisé. Appelons

$$T = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

Nous avons que

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (\frac{(t-1)(t+1)}{2t^2}, \frac{2(1-t)}{t^3}) \\
&= (t-1)(\frac{(t+1)}{2t^2}, -\frac{2}{t^3})
\end{aligned}$$

ce qui fait que

$$\lim_{t\to 1} T = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)}{|t-1|} \frac{(1,-2)}{\sqrt{5}}.$$

Cela donne la droite $2x + y = 3$.

(b) Il y a une tangentes verticale en $t = -1$. Nous trovons le point $(-1, -3)$.

(c) Il n'y pas de tangentes horizontales.

3. Nous avons dons le tableau de variation suivante:

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty^{+\infty}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$y(t)$	0	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$		$-$	$-$	$-$		$+$	0	$-$	

Cela donne les dessins suivants sur respectivement $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.