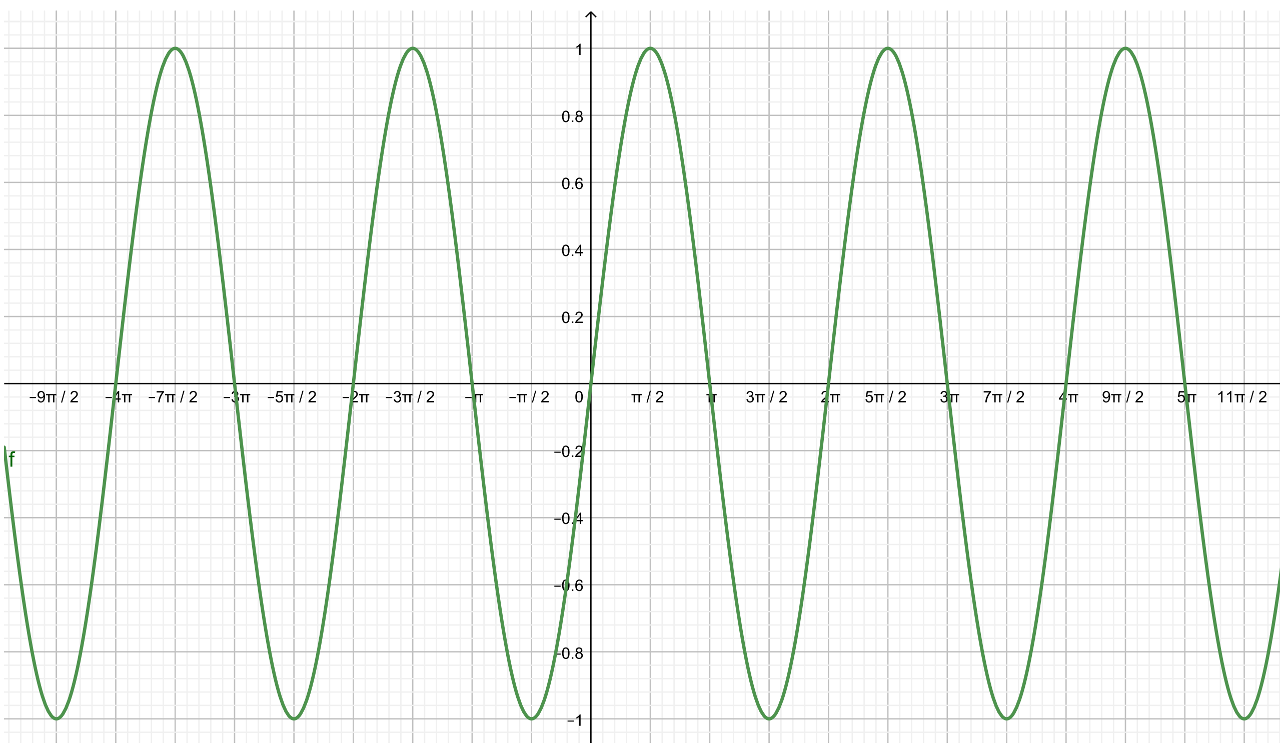
☙ Fonctions trigonométriques

1 Bijectivité

Définition 1 *Soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans J*
La fonction f est une bijection de I dans J si pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$.
Autrement dit, toute valeur de J admet un unique antécédent dans I et si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$.

Exemple 1 *Le graphique suivant est celui de la fonction sinus.*
Cette fonction est-elle bijective ? Si oui dire sur quels intervalles.



Théorème 1 *Si f est une fonction de E dans F bijective alors elle admet une fonction réciproque elle-même bijective notée f^{-1} de F dans E. On a :*

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in F \end{cases}$$

Théorème 2 *Une fonction f continue et strictement monotone sur $[a, b]$ admet une fonction récipoque f^{-1} sur $f([a, b])$ de même monotonie, de plus :*

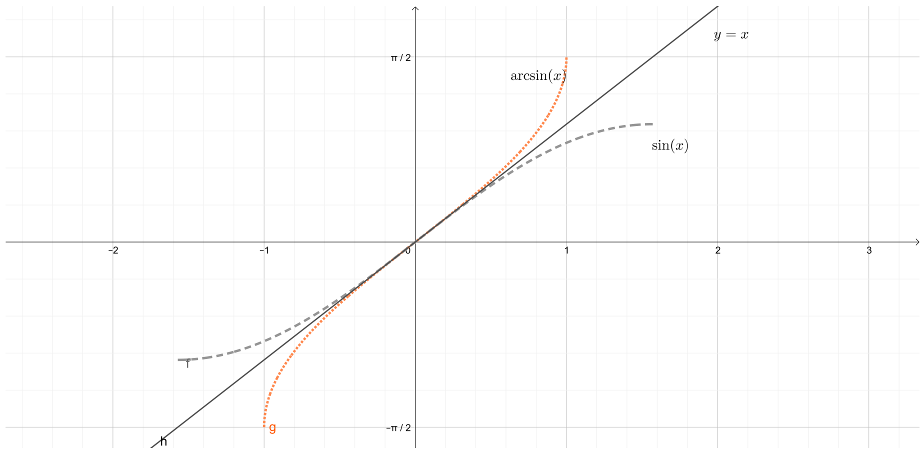
$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

2 Fonctions sin et arcsin

Théorème 3 *La restriction de la fonction sinus à l'intervalle* $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ *à valeurs dans* $[-1;1]$ *est continue et croissante, elle admet donc une fonction réciproque notée* arcsin *:*

$$\begin{cases} y = \arcsin(x) \\ x \in [-1;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin(y) \\ y \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$



La fonction arcsin possède les propriétés suivantes :

$$\forall x \in [-1;1], \begin{cases} \sin(\arcsin(x)) = x \\ \arcsin(-x) = -\arcsin(x) \end{cases}$$

$$\forall x \in]-1;1[, [\arcsin(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(x)) = x$$

On rappelle les propriétés suivantes :

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Exemple 2 *Simplifier les expressions suivantes :*

$$\forall x \in [-1;1], \cos(\arcsin(x)) =$$
$$\forall x \in]-1;1[, \tan(\arcsin(x)) =$$

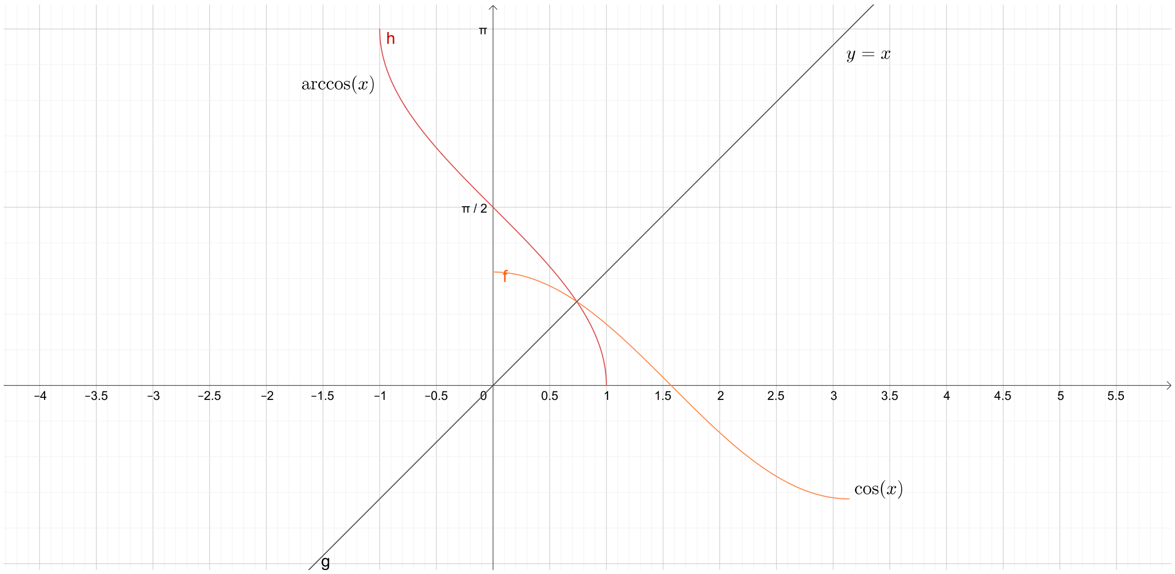
Donner les valeurs suivantes :

$$\arcsin(-1) =$$
$$\arcsin(1) =$$
$$\arcsin(0) =$$
$$\arcsin(0.5) =$$

3 Fonctions cos et arccos

Théorème 4 *La restriction de la fonction cosinus à l'intervalle* $[0;\pi]$ *à valeurs dans* $[-1;1]$ *est continue et décroissante, elle admet donc une fonction réciproque notée* arccos *:*

$$\begin{cases} y = \arccos(x) \\ x \in [-1;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0;\pi] \end{cases}$$



La fonction arccos possède les propriétés suivantes :

$$\forall x \in [-1;1], \begin{cases} \cos(\arccos(x)) = x \\ \arccos(-x) = \pi - \arccos(x) \end{cases}$$

$$\forall x \in]-1;1[[\arccos(x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in [0;\pi], \arccos(\cos(x)) = x$$

On rappelle les propriétés suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = 1 - 2\sin(a)^2 = 2\cos(a)^2 - 1$$

Exemple 3 *Simplifier les expressions suivantes :*

$$\forall x \in [-1;1], \begin{cases} \sin(\arccos(x)) = \\ \tan(\arccos(x)) = \end{cases}$$

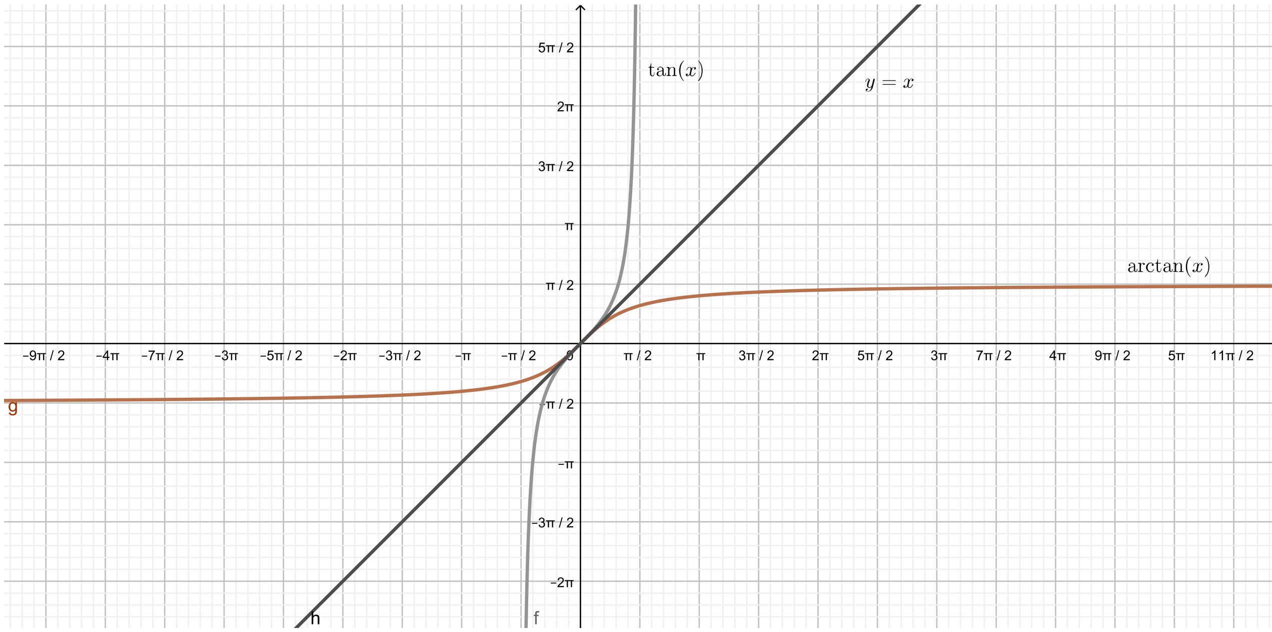
Donner les valeurs suivantes :

$$\arccos(-1) =$$
$$\arccos(1) =$$
$$\arccos(0) =$$
$$\arccos(0.5) =$$

4 Fonctions $\tan$ et $\arctan$

Théorème 5 *La restriction de la fonction tangente à l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ *à valeurs dans* $]-\infty;+\infty[$ *est continue et croissante, elle admet donc une fonction réciproque notée* arctan *:*

$$\begin{cases} y = \arctan(x) \\ x \in]-\infty;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan(y) \\ x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$



Exemple 4 *En utilisant les propriétés précédentes, donner une nouvelle expression de :*

$$\begin{aligned}
&\tan(a+b) = \\
&\tan(a-b) = \\
&\tan(2a) = \\
&1+\tan(x)^2 =
\end{aligned}$$

La fonction arctan possède les propriétés suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \tan(\arctan(x)) = x \\ \arctan(\frac{1}{x}) + \arctan(x) = signe(x)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}[\arctan(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(-x) = \arctan(x)$$

Exemple 5 *Simplifier les expressions suivantes :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sin(\arctan(x)) = \\ \cos(\arctan(x)) = \end{cases}$$

Donner les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
&\arctan(1) = \\
&\arctan(0) = \\
&\arctan(\sqrt{3}) = \\
&\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = \\
&\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) =
\end{aligned}$$