Microéconomie : éléments de corrigé dossier TD 2

L'énoncé du TD est sur Moodle

Exercice 1

Afin de répondre à la question relative à la nature des rendements d'échelle, il est nécessaire de montrer au préalable que cette *fonction est homogène de degré k en K et L.*

Il est donc nécessaire d'énoncer et d'écrire la définition. Une fonction $f(x_i)$ est homogène de degré k en x_i, $i = 1, \dots n$, nous pouvons nous prononcer sue la nature des rendements d'échelle. La définition est la suivante :

Si pour tout $\lambda > 0$, $f(\lambda x_i) = \lambda^k f(x_i)$ (1)

Il s'agit de transposer cette définition au cas particulier d'une fonction à deux facteurs. Il est également pertinent de signaler que pour des contraintes de logique explicative, il convient de choisir λ>1. Cette hypothèse permet de fixer les idées, à savoir mesurer l'effet d'un doublement ou d'un triplement des quantités de facteur, par exemple.

Pour le premier cas: $y = f(K, L) = \left(K^{\frac{1}{4}} + L^{\frac{1}{4}}\right)^3$,

Nous pouvons écrire :

$$f(\lambda K, \lambda L) = \left[(\lambda K)^{\frac{1}{4}} + (\lambda L)^{\frac{1}{4}}\right]^3 = \left[\lambda^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}} + \lambda^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}}\right]^3$$

Nous pouvons mettre $\lambda^{\frac{1}{4}}$ en facteur à l'intérieur du crochet pour écrire :

$$= \left[\lambda^{\frac{1}{4}}\left(K^{\frac{1}{4}} + L^{\frac{1}{4}}\right)\right]^3 = \lambda^{\frac{3}{4}}\left[K^{\frac{1}{4}} + L^{\frac{1}{4}}\right]^3 = \lambda^{\frac{1}{4}} f(K, L)$$

En identifiant avec la définition donnée en (1), nous pouvons lire le degré : $k = \frac{3}{4}$

La fonction est homogène de degré $\frac{3}{4}$ en K, L

Nous pouvons passer maintenant à la notion de rendements d'échelle.

Si $k < 1$, le doublement ou le triplement par exemple, des quantités de facteurs s'accompagne d'un accroissement moins que proportionnel de la quantité produite : ceci implique que la fonction de production est à *rendements d'échelle décroissants*

Examinons le cas de la fonction suivante et appliquons le même raisonnement.

$$f(\lambda K, \lambda L) = 4(\lambda L)^{\frac{1}{3}} + 3(\lambda K) = 4\lambda^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}} + 3\lambda K$$

Il est évident que nous ne pouvons pas mettre λ en facteur et écrire la fonction sous la forme donnée par (1). Cette fonction n'est pas homogène. Nous ne pouvons rien dire sur la nature des rendements d'échelle.

Pour la troisième

$$f(\lambda K, \lambda L) = \frac{(\lambda K)^{\frac{2}{3}}(\lambda L)^{\frac{2}{3}}}{\lambda K + \lambda L} = \frac{\lambda^{\frac{2}{3}}\lambda^{\frac{2}{3}}}{\lambda}\frac{\left[K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}\right]}{(K+L)}$$

$$= \frac{\lambda^{\frac{4}{3}}}{\lambda}\frac{\left[K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}\right]}{(K+L)}$$

$$= \lambda^{\frac{1}{3}} f(K, L)$$

En identifiant avec (1) nous pouvons dire, pour commencer, que la fonction est homogène de degré $k = \frac{1}{3}$ en $K\ et\ en\ L$.

Cette fonction de production est de ce fait à rendements d'échelle décroissants

Exercice 2

1) Nature des rendements d'échelle

Nous devons vérifier si la fonction est homogène de degré k en L (du fait que c'est le seul facteur). Appliquons la définition donnée (en cours aussi) dans l'exercice 1.

$$f(\lambda L) = (\lambda L)^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$$

En identifiant avec (1), nous pouvons déduire que $k = \frac{1}{2}$, et la fonction de production est à rendements d'échelle décroissants.

2) Productivité marginale du travail

Il faut commencer par donner la définition. C'est la variation de la production qui est due à l'accroissement d'une unité de travail. Elle correspond à la dérivée première, par rapport à L, de la fonction de production.

$$P_{mgL} = \frac{dy}{dL} = \frac{1}{2}L^{-\frac{1}{2}}$$

La productivité marginale est positive, mais décroissante. On doit vérifier cette propriété en examinant le signe de la dérivée seconde

$\frac{dP_{mgL}}{dL} = -\frac{1}{4}L^{-\frac{1}{2}-1}$, il suffit en réalité de vérifier le signe. Il est négatif et la productivité marginale est décroissante.

3) Pour la demande de travail, nous devons considérer que le producteur, ou la firme, cherche à maximiser son profit. Nous devons donc exprimer la recette totale et le coût total ; le profit étant la différence des deux.

$$\pi(L) = pf(L) - wL$$

En remplaçant la fonction de production par son expression, il vient : $\pi(L) = pL^{\frac{1}{2}} - wL$

La condition de maximisation du profit, nous conduit à écrire :

$$\frac{d\pi}{dL} = 0 \;\Rightarrow \frac{1}{2}pL^{-\frac{1}{2}} - w = 0$$

Et

$$pL^{-\frac{1}{2}} = 2w \;\Rightarrow \frac{p}{L^{\frac{1}{2}}} = 2w \;\Rightarrow L^{\frac{1}{2}} = \frac{p}{2w} \;\Rightarrow L = \frac{p^2}{4w^2} \qquad (2)$$

L'expression (2) correspond à la fonction de demande de travail. C'est une fonction croissante en p (dans les prix du bien final) et décroissante en fonction du salaire (le prix du facteur lui-même.

4) La fonction d'offre (des biens) et le profit

Nous pouvons l'établir en retournant à la fonction de production : $y = \left(\frac{p^2}{4w^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{p}{2w}$ (3)

Elle est croissante en p et décroissante en w

Nous pouvons alors déduire le profit (maximisé)

$$\pi = p\frac{p}{2w} - w\frac{p^2}{4w^2}$$

Nous avons utilisé les relations (2) et (3)

En simplifiant et en effectuant la soustraction, il vient :

$$\pi = \frac{p^2}{2w} - \frac{p^2}{4w}$$

$$\pi = \frac{p^2}{4w} > 0$$

Ce n'est que dans le court terme que le profit est positif. Comme nous le verrons plus loin, ce profit s'annule avec l'entrée sur le marché de firmes concurrentes attirées par le gain de parts de marché.

Exercice 3

Question 1

Dans l'énoncé, nous disposons d'un ensemble d'indications sur la fonction de production à construire. Il s'agit d'une Cobb-Douglas, dont la forme générale est donnée par l'expression :

$$y = AK^{\alpha}L^{\beta} \quad (4)$$

Pour déterminer explicitement la fonction, il faut calculer les paramètres α, β et l'élément exogène *A*. Il nous faut donc 3 indications, car nous sommes en présence de 3 inconnues à déterminer.

La première indication nous donne le pourcentage de variation de la production suite à un certain pourcentage d'accroissement de la quantité d'un facteur, le capital en l'occurrence, toutes choses étant égales par ailleurs.

Cette indication renvoie à la définition d'une élasticité de production. La fonction donnée dans l'énoncé est une Cobb-Douglas. Nous savons par la démonstration en cours que l'exposant porté sur le facteur correspond à l'élasticité de production relative à ce facteur. Nous avons néanmoins besoin de montrer ce résultat (il est moins évident à voir lorsque la fonction n'est pas du type Cobb-Douglas)

- Par définition : $\varepsilon_K = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta K}{K}}$

Pour l'exemple numérique, l'application de cette définition conduit à écrire : $\varepsilon_K = \frac{6\%}{12\%} = \frac{1}{2}$

Cette définition peut également donner lieu à l'expression suivante :

$$\varepsilon_K = \frac{\partial y}{\partial K}\frac{K}{y} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}\ \frac{K}{AK^{\alpha}L^{\beta}}$$

En simplifiant l'expression, nous retrouvons le résultat donné en cours : $\varepsilon_K = \alpha$

En identifiant les deux résultats, nous pouvons établir que $\varepsilon_K = \frac{1}{2}$

La deuxième indication concerne le doublement des quantités de facteurs. C'est une indication qui relève de la notion de rendements d'échelle dans la mesure où tous les facteurs se modifient dans la même proportion.

Si nous venons à traduire l'énoncé, nous aurons :

$f(\lambda K, \lambda L)$, où $\lambda = 2$ avec comme conséquence : $f(2K, 2L) = 4f(K, L)$ (5)

Or un retour à la définition de la fonction homogène de degré *k* en *K* et *L* nous permet d'écrire :

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^k f(K, L) \qquad (6)$$

En identifiant (5) et (6), nous pouvons déduire que : $\lambda^k = 4$, pour $\lambda = 2$, on a l'équation $2^k = 4$, on déduit que $k = 2$

La fonction de production est à rendements d'échelle croissants, puisque $k > 1$

Il nous faut maintenant traduire cette propriété pour la Cobb-Douglas. Nous connaissons le résultat puisque la démonstration a été faite en cours. Il convient toutefois de reprendre cette démarche de manière à répondre à la question de l'exercice.

$$f(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} = \lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}AK^{\alpha}L^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}AK^{\alpha}L^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}f(K, L)$$

En identifiant avec la définition donnée en (1), il est facile de voir que la fonction est homogène de degré $k = \alpha + \beta$, en K et en L.

Or nous venons de montrer que $k = 2$. Nous savons également que $\alpha = \frac{1}{2}$, il est alors facile de déduire que $\beta = k - \alpha = 2 - \frac{1}{2}$ et que $\beta = \frac{3}{2}$

Il nous reste à exploiter la *dernière indication* :

En remplaçant les données numériques dans l'expression de la fonction de production déjà identifiée :

$$y = AK^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}} \ \Rightarrow 162 = A(4)^{\frac{1}{2}}(9)^{\frac{3}{2}}$$

Il s'agit d'extraire la racine carrée de 4 et extraire la racine carrée de 9 et puis l'élever au cube :

$162 = A\ 2.27 \Rightarrow 162 = 54\,A$ et $A = 3$

Nous avons tous les éléments pour écrire l'expression de la fonction de production :

$$y = 3K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}$$

Question 2

Il s'agit ici de résoudre le problème du producteur, c'est-à-dire maximiser son niveau de production sous la contrainte de ses dépenses, c'est-à-dire ses coûts (au sens comptable).

La condition d'équilibre du producteur :

$$TMST = \frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}} = \frac{3\frac{3}{2}}{3\frac{1}{2}}\frac{L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{-1}{2}}L^{\frac{3}{2}}} = 3\frac{K}{L} = \frac{w}{r} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Peut être obtenue en passant par l'écriture de l'expression de la fonction de Lagrange :

$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = 3K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}} + \lambda(600 - 10L - 15K)$

Les deux premières conditions du premier ordre pour un maximum (voir le cours) donnent la même expression que celle obtenue avec la condition d'équilibre du producteur :

$$\frac{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L}}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}} = 3\frac{K}{L} = \frac{w}{r} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Avec des valeurs numériques attribuées aux prix des facteurs et à la dépense totale, nous pouvons calculer les *quantités demandées* des facteurs à l'équilibre

La condition d'équilibre du producteur nous donne :

$$9K = 2L \Rightarrow L = \frac{9}{2}K$$

En substituant dans la contrainte, il vient :

$$600 = 10.\frac{9}{2}K + 15K$$

Ce qui nous permet d'établir que $K = 10$, et déduire ensuite que $L = 45$.

Question 3

Il s'agit de déterminer et d'interpréter le multiplicateur de Lagrange. Remarque : à ne pas confondre la notation λ, avec celui qui nous permet d'établir que la fonction est homogène de degré *k.*

A partir de l'expression du Lagrangien, nous pouvons établir la première condition du premier ordre pour un maximum :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Rightarrow 3\frac{3}{2}K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} = w\lambda$$

En remplaçant par les valeurs numériques données et celles des solutions trouvées, nous pouvons déterminer la valeur de λ

$$\lambda = 3\frac{3}{2}\frac{(10)^{\frac{1}{2}}(45)^{\frac{1}{2}}}{10} \Rightarrow \lambda \cong 9{,}54$$

Or le multiplicateur de Lagrange mesure l'accroissement de la production qui découle du relâchement de la contrainte budgétaire d'une unité monétaire

$$\lambda = \frac{dy}{dD} \Rightarrow dy = \lambda dD$$

Dans notre cas, une unité monétaire supplémentaire accordée aux dépenses (le budget du producteur) provoque une hausse de la production de 9,54 unités

Remarque importante : la démonstration du calcul

De manière plus générale, écrivons l'expression du Lagrangien

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = f(K, L) + \lambda[D - wL - rK]$$

Les conditions du premier ordre pour un maximum nous donnent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial L} - \lambda w = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial L} = \lambda w$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} - \lambda r = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial K} = \lambda r$$

Ces conditions tiennent pour un optimum. Nous avons par ailleurs la fonction de production donnée par : $y = f(K, L)$

La dérivée totale de la fonction de production est donnée par :

$$dy = \frac{\partial f}{\partial K}\, dk + \frac{\partial f}{\partial L} dL$$

En remplaçant les dérivées partielles par leur expression à l'optimum, il vient :

$$dy = \lambda r dK + \lambda w dL = \lambda[r dK + w dL]$$

En dérivant totalement la contrainte, il vient :

$$dD = r dK + w dL$$

En substituant cette expression dans la précédente, nous obtenons notre résultat :

$$dy = \lambda dD \quad ou \qquad \frac{dy}{dD} = \lambda$$

L'interprétation du multiplicateur de Lagrange, revient à donner l'effet de l'accroissement de la dépense d'une unité monétaire (ce que nous avons qualifié du relâchement de la contrainte) sur l'augmentation de la production.

Nous affirmons que l'accroissement de la dépense implique aussi un accroissement de la production : $\lambda \geq 0$, le multiplicateur est strictement positif lorsque la contrainte est saturée, c'est-à-dire égale à 0(expression de la rareté des ressources)

$$D - rK + wL = 0 \; \Rightarrow \lambda > 0$$

Remarque supplémentaire :

Nous avons insisté sur l'écriture de la contrainte dans le « *bon sens* ». La résolution algébrique du problème du producteur n'est pas affectée si l'égalité est donnée dans le mauvais sens, mais c'est le signe du multiplicateur qui serait inversé. Or le multiplicateur est de signe positif (ou nul) car il mesure la rareté des ressources, c'est l'équivalent d'un prix. Ce prix est nul si la contrainte n'est pas saturée et ceci traduit l'idée que les ressources sont abondantes (ne sont pas rares) et qu'elles ne commandent pas un prix positif (voir l'exemple traité en cours)

Exercice 4

Question 1

Ici nous avons la fonction de production. Vous pouvez utiliser les mêmes arguments de l'exercice 3 pour dire que les élasticités de production sont données par les exposants portés sur les variables K et L.

Par définition

$$\varepsilon_K = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta K}{K}}$$

Pour une Cobb-Douglas, elle correspond à $\alpha = \frac{2}{3}$ l'exposant de la variable capital K

Nous pouvons introduire la définition correspondante pour le travail et déduire que $\varepsilon_L = \frac{1}{2}$

Pour déduire le pourcentage de la hausse de la production suite à l'accroissement de 3% du capital, la réponse est dans la définition. En effet l'élasticité de production du capital traduit l'effet du taux de variation du capital sur le taux de variation du produit. Il est évident que la réponse correspond au numérateur de la fraction de la définition de l'élasticité, donc 2%.

Le $TMST = \frac{P_{mgL}}{P_{mgK}}$, il a pour expression :

$$TMST = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = \frac{6\frac{1}{2}}{6\frac{2}{3}} \frac{L^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{2}{3}}}{L^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{3}}} = \frac{3}{4} \frac{K}{L}$$

La condition d'équilibre du producteur stipule que le TMST doit être égal au rapport des prix des facteurs :

$$\frac{3}{4}\frac{K}{L} = \frac{w}{r} \Rightarrow K = \frac{4}{3}\frac{w}{r} L \qquad (7)$$

La relation (7) correspond à l'équation du sentier d'expansion de l'entreprise. Elle nous donne la combinaison optimale capital/travail et ceci quel que soit le niveau des dépenses.

Comme nous l'avons signalé en cours cette relation est linéaire dans le cas d'une Cobb-Douglas.

Question 2

La question relative à l'évaluation du TMST au point d'équilibre est destinée à nous rappeler la définition initiale du TMST, à savoir $-\frac{dK}{dL}$

La production maximisée est d'un niveau constant, soit Q^*.

L'expression correspondante est

$$\frac{Q^*}{6} = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{2}{3}} \Rightarrow K^{\frac{2}{3}} = \frac{Q^*}{6} L^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow K = \left(\frac{Q^*}{6}\right)^{\frac{3}{2}} L^{\frac{-3}{4}}$$

D'où $TMST = -\frac{dK}{dL} = \frac{3}{4}\left(\frac{Q^*}{6}\right)^{\frac{3}{2}} L^{\frac{-7}{4}}$

Il n'a pas la même expression que celui retrouvé dans la condition d'équilibre du producteur, mais les deux valeurs sont identiques à l'équilibre.

Pour calculer les fonctions de demande des facteurs, nous devons combiner la condition(7) avec la contrainte de dépenses

$$B = wL + rK \Rightarrow B = wL + r\ \frac{4}{3}\frac{w}{r} L$$

En simplifiant les r et en regroupant les termes, il vient :

$$B = \left(1 + \frac{4}{3}\right) wL \Rightarrow B = \frac{7}{3}\ wL \Rightarrow L = \frac{3}{7}\frac{B}{w}$$

Nous pouvons facilement déduire la demande de capital : $K = \frac{4}{7}\frac{B}{r}$

En utilisant les données numériques de l'exercice, nous obtenons les quantités à l'équilibre : $L^* = 1{,}9$ et $K^* = 3{,}8$

Question 3

Le budget nécessaire pour doubler la production. Cette question fait appel aux rendements d'échelle, car pour doubler la production il est nécessaire de trouver la croissance des quantités de facteurs correspondante.

Comme nous avons une Cobb-Douglas, la nature des rendements d'échelle est donnée par la somme des exposants : $k = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \mapsto k = \frac{7}{6}$

Par la définition des fonctions homogènes, nous pouvons écrire :

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^k f(K, L)$$

Or ici nous souhaitons doubler la production et nous connaissons k, nous devons donc résoudre :

$$\lambda^{\frac{7}{6}} = 2 \mapsto \lambda = (2)^{\frac{7}{6}} \mapsto 1{,}8$$

Cette valeur numérique doit être obtenue avec l'aide de votre calculatrice

Les quantités de facteurs doivent être multipliées par 1,8, donc d'une grandeur inférieure au double (la fonction étant à rendements d'échelle croissants). Nous devons toutefois ajouter que ceci est vrai si les prix des facteurs ne se modifient pas.

Si le salaire est inchangé, mais que le prix de location du capital baisse, la dépense nécessaire sera moindre.