Microéconomie Chapitre III : Le producteur

Nous donnons dans ce chapitre des éléments de cours relatifs à la théorie de la production. Dans cette première partie nous envisageons le producteur comme demandeur de facteurs de production. La présentation est de ce fait semblable à celle du consommateur. Ce dernier est supposé maximiser une fonction d'utilité sous la contrainte de revenu. Le producteur, pour sa part, est supposé maximiser son niveau de production sous la contrainte de dépense (identique à celle du revenu, mais comme nous le verrons ultérieurement est en fait une expression du coût).

Le niveau de production est lié à des considérations techniques exprimées par la « fonction de production ». C'est l'équivalent pour le producteur de la fonction d'utilité. Cette dernière exprime des préférences qui sont de nature subjective. Il convient de ce fait de commencer par introduire la fonction de production et les hypothèses spécifiques à la théorie du producteur, hypothèses absentes dans la présentation du consommateur.

Section I : Concepts et éléments de définition

§1 L'entreprise dans le modèle néoclassique simplifié

Dans la théorie néo-classique simplifiée, l'entreprise est modélisée comme une **« boîte noire »,** c'est-à-dire qu'il nous suffit d'identifier les *flux entrants* et les *flux sortants* pour cerner son comportement. En d'autres termes, il n'est pas nécessaire de décrire et d'analyser sa structure interne pour comprendre son fonctionnement. C'est surtout sa relation avec le marché qui nous importe. Les *flux entrants* sont les facteurs de production, que nous limiterons au capital et au travail et dont les quantités s'échangent sur un marché concurrentiel (le marché des facteurs). Les *flux sortants* sont les productions finales, qui sont elles-mêmes échangées sur un marché concurrentiel aussi.

On préfère parler d'une entreprise (représentative) ou d'un secteur regroupant la totalité des entreprises qui fabriquent le même produit (hypothèse de biens homogènes) en utilisant des facteurs de production. Identifier une entreprise, c'est identifier son produit (unique, pas de production jointe), donc identifier la façon d'obtenir ce produit, donc sa *fonction de production*.

Par ailleurs toutes les entreprises ont accès aux mêmes connaissances techniques. Il s'agit de puiser dans le même *catalogue* la combinaison des facteurs appropriée aux prix du marché. Les entreprises ne peuvent pas se faire concurrence par les choix des techniques.

§ 2 La fonction de production

La fonction de production est une relation qui indique le niveau maximal de production qui peut être obtenu par les différentes combinaisons de facteurs pour une technologie donnée.

$$Y = F(L)$$

Est une fonction à une seule variable, par exemple le travail. C'est une fonction à dérivée première positive mais décroissante. La figure III.1 donnée en cours correspond à l'allure de cette fonction. Ce que l'on désigne par fonction de production correspond à la frontière supérieure de l'ensemble de production (situé en dessous de cette courbe), c'est bien l'ensemble des productions maximales autorisées par l'introduction de quantités supplémentaires de travail. Les premières unités de travail donnent lieu à une forte croissance de la production. Celle-ci est atténuée au fur et à mesure de l'ajout supplémentaire de quantités de travail. Nous dirons que *la productivité marginale du travail est décroissante*. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement. C'est pourtant une hypothèse centrale de la théorie de la production.[1]

Avec deux facteurs de production, l'ensemble de production devient un volume (3 dimensions) et l'ensemble des productions efficaces, une surface. Sur la figure III.2 donnée en cours nous avons donné cette illustration dans un repère à 3 dimensions. L'axe vertical correspond au niveau de production et le plan horizontal comprend les axes des deux facteurs de production (K, L).

Pour un niveau de production donné, un plan sécant vient couper le volume. L'intersection décrit une courbe ; une fois celle-ci projetée dans le plan des quantités de facteur, elle donne lieu à une *courbe d'indifférence à la production*, ou à un isoquant. Celui-ci est le lieu de toutes les combinaisons du capital et du travail qui procurent le même niveau de production. Des niveaux de production plus élevés correspondent à des courbes d'indifférence plus élevées dans le plan des quantités de facteurs (voir figure III.3)

Elles ont la même allure que les courbes d'indifférence du consommateur. Ce sont des courbes décroissantes et convexes. Le long d'une telle courbe, nous ne pouvons pas augmenter la quantité d'un facteur (pour un même niveau de production) sans réduire la quantité de l'autre facteur. *Les facteurs sont substituables*. Les courbes sont convexes, elles traduisent l'idée que les facteurs sont essentiels à la production et qu'il est nécessaire d'utiliser une quantité positive de chaque facteur pour produire.

§ 3 Rendement décroissants des facteurs et rendements d'échelle

Le temps dans un modèle théorique est défini de manière logique par opposition à une définition historique. Le *court terme* fait référence à l'existence de facteurs donnés en quantités limitées à côté de facteurs variables. La fonction de production comporte des *facteurs fixes* et des *facteurs variables* :

$f\left(x_1, x_2, \dots \dots x_{i,} x_{i+1} \dots . . x_n\right)$ avec $x_1 \dots x_i$, des facteurs fixes et $x_{i+1} \dots \dots . x_n$ des facteurs variables.

Pour fixer les idées, prenons une fonction à deux facteurs, le capital et le travail $F(K, L)$. Le capital peut être considéré comme fixe dans le court terme et le travail comme facteur variable.

Les rendements d'échelle mesurent la variation de la production lorsque le travail et le capital varient tous les deux simultanément dans les mêmes proportions. Plus généralement lorsque tous les facteurs variant dans les mêmes proportions. C'est une notion de *long terme.*

Introduisons la définition suivante : La fonction $y = f\left(x_1, x_{2,} \dots . x_i\right)$ est *homogène de degré k en* x_i signifie que si on multiplie toutes les variables par un nombre positif $\lambda > 0$, la fonction est multipliée par λ^k. Pour des besoins de simplification du raisonnement on peut choisir λ> 1

[1] Plus généralement, nous allons introduire l'hypothèse de la productivité marginale décroissante des facteurs comme une hypothèse de court terme

pour traduire l'idée que nous doublons ou nous triplons les quantités de tous les facteurs (au lieu de supposer que nous multiplions par ½ ou 1/3 qui correspond à une réduction des quantités de facteurs).

La définition aura pour expression :

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2 \ldots\ldots) = \lambda^k f(x_1, \ldots\ x_n) \qquad (III.1)$$

Pour le cas de deux facteurs, nous aurons :

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^k f(K, L) \qquad (III.2)$$

Pour des raisons de simplification nous allons raisonner sur le cas de deux facteurs, donc sur celui de la définition donnée par l'équation III.2

Les rendements d'échelle sont croissants, constants ou décroissants. Ils sont constants si l'application de doses supplémentaires de facteurs de production conduit à une augmentation strictement proportionnelle de la production.

Pour fixer les idées, si l'on double la quantité de tous les facteurs (le capital et le travail), c'est-à-dire si λ = 2 dans la définition III.2, et que la production double, alors $\lambda^k = 2$. Selon toute évidence ceci est possible si et seulement si $k = 1$

De manière générale, nous pouvons dire que si la fonction de production est homogène de degré *k* en K et L, alors :

- Les rendements d'échelle sont *croissants* si $k > 1$. L'application des doses supplémentaires de facteurs de production conduit à une augmentation plus que proportionnelle de la production. Par exemple si l'on constate que le doublement de la quantité de tous les facteurs conduit à quadrupler la production : $2^k = 4$, alors $k = 2 > 1$.
- Les rendements d'échelle sont *constants* si $k = 1$.
- Les rendements d'échelle sont *décroissants* si $k < 1$. Le doublement de la quantité de tous les facteurs, par exemple, conduit à un accroissement moins que proportionnel de la production. Pour $k = \frac{1}{2}$, nous pouvons facilement vérifier que $2^{\frac{1}{2}} = 1{,}414$

L'existence de rendements d'échelle croissants est incompatible avec l'hypothèse de la concurrence parfaite.

Les rendements factoriels ou encore les *productivités marginales des facteurs* est une notion de court terme. Elle nous permet d'appréhender l'effet sur la production de l'accroissement de la quantité d'un facteur lorsque toutes les quantités des autres facteurs ne se modifient pas. *La productivité marginale d'un facteur est décroissante.*

On parle de *rendements décroissants* à la suite des travaux de Turgot sur les rendements de la terre (fin du XVIII siècle)

Turgot constate que la production obtenue dans l'agriculture n'est pas proportionnelle aux *avances*. Si on applique successivement des quantités égales de facteurs (travail ou engrais, par exemple) à une étendue fixe de terre, les quantités de produits, grâce à cette application, s'accroissent jusqu'à un certain seuil. Au-delà de ce niveau, les accroissements de produits deviennent de plus en plus faibles, avant de s'annuler totalement.

La productivité marginale d'un facteur, pour le producteur, est un concept équivalent à celui de l'utilité marginale pour le consommateur.

Il mesure l'effet sur la quantité produite de la dernière unité de facteur appliquée dans la production, toutes choses étant égales par ailleurs. D'un point de vue mathématique cette définition correspond à la dérivée partielle de la fonction de production par rapport à un facteur. Pour $y = f(K, L)$, la productivité marginale du travail a pour définition $\frac{\partial f}{\partial L}$ et celle du capital :$\frac{\partial f}{\partial K}$.

§4 Les rendements décroissants sont-ils compatibles avec les rendements d'échelle croissants ?

Il convient de présenter ce paragraphe en s'appuyant sur une fonction de production de type Cobb-Douglas.

Soit la fonction suivante :

$$y = f(K, L) = K^{\alpha} L^{\beta} \qquad (III.3)$$

La productivité marginale du travail, notée P_{mgL},et celle relative au capital P_{mgK}, ont pour expression mathématique :

$$P_{mgL} = \frac{\partial f}{\partial L} \quad et \quad P_{mgK} = \frac{\partial f}{\partial K}$$

Pour le cas de la Cobb-Douglas donnée plus haut, ces productivités marginales ont pour expressions :

$$\frac{\partial f}{\partial L} = \beta K^{\alpha} L^{\beta-1} \qquad et \qquad \frac{\partial f}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1} L^{\beta} \qquad (III.4)$$

Ces dérivées partielles sont positives. Pour vérifier qu'elles sont décroissantes il faut dériver encore une fois et vérifier le signe du résultat obtenu. Les productivités marginales sont décroissantes si les dérivées partielles secondes sont négatives.

Par conséquent :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial L^2} = (\beta - 1)\beta K^{\alpha} L^{\beta-2} < 0 \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial K^2} = (\alpha - 1)\alpha K^{\alpha-2} L^{\beta} < 0 \qquad (III.5)$$

Les productivités marginales sont décroissantes si : $0 < \beta < 1 \quad et \quad 0 < \alpha < 1$

Que pouvons-nous dire des rendements d'échelle ?

Appliquons la définition de la fonction homogène de degré k $(III.2)$ à la Cobb-Douglas donnée en $(III.3)$

$$f(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^{\alpha} (\lambda L)^{\beta} = \lambda^{\alpha} K^{\alpha} \lambda^{\beta} L^{\beta} = \lambda^{(\alpha+\beta)} K^{\alpha} L^{\beta} = \lambda^{(\alpha+\beta)} f(K, L)$$

La fonction est homogène de degré $k = (\alpha + \beta)$

La fonction de production est à rendements d'échelle croissants si $(\alpha + \beta) > 1$.

Or les productivités marginales sont décroissantes lorsque ces paramètres sont inférieurs à l'unité. On suppose que $\alpha = \beta = \frac{3}{4} < 1$. La somme des paramètres excède l'unité ($\frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1$) et la fonction de production associée à cet exemple est à rendements d'échelle croissants mais qui exhibe en même temps la propriété des rendements factoriels décroissants.

Nous retiendrons que pour une Cobb-Douglas (à ne pas généraliser pour toute autre fonction de production), la productivité marginale des facteurs est décroissante si le paramètre qui indique la puissance à laquelle est élevé ce facteur est inférieur à l'unité. De même, et pour une Cobb-Douglas exclusivement, la nature des rendements d'échelle est donnée par la somme des exposants affectés aux facteurs.

Dans le cas particulier des rendements d'échelle constants,

$0 < \alpha < 1 \quad et \quad 0 < \beta < 1$, pour s'assurer que les productivités marginales sont décroissantes, et

$$\alpha + \beta = 1, \; d'où \; \beta = 1 - \alpha$$

La fonction peut s'exprimer comme :

$$y = f(K, L) = K^{\alpha} L^{(1-\alpha)}$$

Section II : L'équilibre du producteur

§1. Résolution géométrique

Le producteur, à l'image du consommateur, cherche à atteindre le niveau de production le plus élevé en respectant sa contrainte de dépense.

$$Max \; y = f(K, L)$$

$$sous \; D = rK + wL$$

r, w , sont les rémunérations du capital et du travail. Ce sont les prix de location des services des facteurs. Ils sont donnés par le marché et ne peuvent pas faire l'objet d'un choix de la part du producteur. Avec le niveau de dépense *D*, ce sont les *variables exogènes* du modèle. Il reste au producteur de choisir les quantités de capital et de travail et de les combiner efficacement selon les connaissances techniques qui sont à sa disposition.

La contrainte est une fonction linéaire décroissante dans le rapport des prix des facteurs :

$$K = -\frac{w}{r}L + \frac{D}{r} \qquad (III.6)$$

Sur la figure III.4 donnée en cours, nous avons représenté la solution géométrique de l'équilibre du producteur. L'agent cherche à atteindre la courbe d'indifférence à la production la plus élevée compte tenu de sa contrainte de dépense. La solution, comme dans le cas du consommateur, est obtenue comme le point de tangence de la droite de budget et de la contrainte de dépense donnée en (*III.6*).

Nous pouvons définir le TMST (équivalent du TMS), *le taux marginal de substitution technique* comme étant la quantité de capital à laquelle on doit renoncer pour obtenir une unité supplémentaire de travail , $TMST = -\frac{dK}{dL}$. Le long d'une courbe d'indifférence convexe, celui-ci est décroissant.

Un déplacement le long d'un isoquant correspond à un effet de substitution (ou un effet prix). Sur la figure III.5 (donnée en cours), nous avons représenté l'effet une hausse du rapport des prix $\frac{w}{r}$, toutes choses étant égales par ailleurs. Il se traduit, d'un point de vue géométrique par une pente plus forte de la droite de dépense. Nous avons un nouveau point de tangence qui traduit la *substitution du capital au travail*. Ceci découle du fait que la rémunération du travail a augmenté plus vite que celle du capital (ou encore le salaire augmente alors que le prix de location du capital reste inchangé). L'ajustement dans la production se fait par le choix d'une technique qui utilise relativement plus de capital que de travail. Ce dernier est devenu relativement plus rare que le capital (son prix a augmenté plus vite), le producteur opte pour *des techniques de production plus intensive en capital.*

§.2 Résolution algébrique

Comme pour le consommateur, la condition d'équilibre du producteur consiste à égaliser la productivité marginale des facteurs à leur prix. A titre d'exemple, la firme continue à embaucher du travail jusqu'à ce que la productivité de la dernière unité embauchée égalise le salaire donnée par le marché. On doit comprendre que toutes les unités précédentes fournissent une productivité supérieure au salaire, ce qui poussait l'entreprise à continuer son embauche. On dit que *les facteurs sont rémunérés à leur productivité marginale.* Ceci ne veut nullement dire que la firme a la possibilité de fixer le salaire à la hauteur de la productivité du travail. Le salaire est donné par le marché et la firme n'a d'autre moyen que de déterminer la quantité de travail. Celle-ci est obtenue par la productivité de la dernière unité de travail qui rejoint l'entreprise.

La condition d'équilibre du producteur devient :

$$TMST = \frac{P_{mgL}}{P_{mgK}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}} = \frac{w}{r} \qquad (III.7)$$

Elle nous donne la combinaison optimale des facteurs. Ajoutée à la contrainte donnée par (*III.6*), nous pouvons établir un système de deux équations à deux inconnues pour résoudre. La solution de ce problème exprime *les fonctions de demande des facteurs*

A titre d'exemple, appliquons cette procédure de résolution à la fonction de type Cobb-Douglas à *rendements d'échelle constants*.

Sans perte de généralité, considérons la fonction suivante :

$$y = f(K, L) = K^{\alpha} L^{(1-\alpha)}$$

La condition d'équilibre du producteur s'écrit :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}} = \frac{(1-\alpha)L^{-\alpha}K^{\alpha}}{\alpha K^{(\alpha-1)}L^{(1-\alpha)}} = \frac{w}{r}$$

Qui s'écrit, après simplification, comme :

$$\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{K}{L} = \frac{w}{r} \qquad (III.8)$$

Elle indique une composition constante du capital au travail :

$$K = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}\frac{w}{r} L \qquad (III.9)$$

(*III. 9)* correspond à l'équation du *sentier d'expansion de l'entreprise*. C'est l'équivalent de la courbe consommation- revenu dans la théorie du consommateur. Pour une Cobb-Douglas cette relation est linéaire. La composition technique est inchangée quel que soit le niveau des dépenses.

A partir de (*III.9)* nous avons la relation suivante : $rK = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} wL$

En substituant cette équation dans la contrainte donnée par : $D = rK + wL$, nous pouvons déterminer les fonctions de demande des facteurs :

$$D = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} wL + wL$$

La fonction de demande de travail devient :

$$L = (1-\alpha)\frac{D}{w}$$

Celle du capital peut facilement se déduire à partir de la condition d'optimalité ou par un retour à la contrainte :

$$K = \alpha\frac{D}{r}$$

§.3 *Le théorème de l'épuisement du produit*

Nous avons le corollaire suivant à la définition d'une fonction homogène donnée plus haut dans le texte, (*III.1)* et (*III.2)*

On donne, sans démontrer ce résultat connu comme *l'identité d'Euler :*

Si $f(x_1, x_2, \dots x_i \dots x_n)$ est homogène de degré k en x_i alors $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k\, f(x_1 \dots x_n)$

Si on applique ce résultat à une fonction homogène à deux facteurs $y = f(K, L)$, on obtient :

$$K \frac{\partial f}{\partial K} + L \frac{\partial f}{\partial L} = kf(K, L) = ky \qquad (III.10)$$

Or en situation d'équilibre, la condition d'efficacité consiste à rémunérer les facteurs à leur productivité marginale. En normalisant le prix du bien final à 1, l'output « y » correspond aussi à la valeur de la production.

Pour :

$$\frac{\partial f}{\partial K} = r \qquad et \qquad \frac{\partial f}{\partial L} = w$$

En substituant dans l'équation (*III.10*), nous obtenons : $rK + wL = ky$

Pour une fonction de production à rendements d'échelle constants, $k = 1$, la condition (*III.10*) devient :

$$rK + wL = y \qquad (III.11)$$

Ce résultat exprime le *Théorème de l'épuisement du produit*, qui traduit l'idée selon laquelle si les facteurs de production sont rémunérés à leur productivité marginale, alors tout le produit sera distribué. Ce résultat est clairement illustré pour une fonction de production à rendements d'échelle constants, d'où son intérêt dans la modélisation des situations de concurrence (en statique comme en dynamique cette hypothèse sur les rendements d'échelle est très répandue dans la littérature). Elle traduit aussi l'idée, que nous aborderons dans les chapitres suivants consacrés aux coûts de production et à l'équilibre de la firme dans un marché concurrentiel, de l'efficacité des marchés dans l'allocation des ressources. Le marché possède une autre fonction à côté de celle de l'allocation optimale de ressources, c'est celle de *la distribution efficace des revenus.* Dans l'écriture (*III.11)* le capital a obtenu sa « juste » rémunération (le profit) ainsi que le travail (la masse des salaires). Si cette égalité avec la valeur du produit n'est pas satisfaite (elle serait inférieure) c'est que une partie du produit n'a pas été distribuée ; c'est ce que nous allons qualifier par des **surprofits.** Le profit normal est la rémunération du capital rK.

§ 4 Les élasticités de production

L'élasticité de production du capital mesure le taux de variation de la production suite à un accroissement de 1% de la quantité de capital. Une définition semblable peut être formulée pour l'élasticité de production relative au travail

Supposons que la fonction de production soit donnée par une Cobb-Douglas : $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$

$$\varepsilon_K = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta K}{K}} \qquad et \qquad \varepsilon_L = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta L}{L}}$$

Nous devons évaluer ces élasticités en un point de la fonction de demande des facteurs, en l'occurrence au point d'équilibre.

$$\varepsilon_k = \frac{\partial y}{\partial K}\frac{K}{y} = \alpha A K^{(\alpha-1)} L^{\beta} \frac{K}{AK^{\alpha}L^{\beta}}$$

En simplifiant, nous obtenons que :$\varepsilon_K = \alpha$. Nous pouvons facilement vérifier que : $\varepsilon_L = \beta$

Nous pouvons donc retenir le résultat suivant pour une fonction Cobb-Douglas : les exposants portés aux variables que sont les facteurs correspondent à leur élasticité de production.

Section III : Méthode de Lagrange

Pour un problème de maximisation(ou de minimisation) sous contraintes nous disposons d'un puissant outil mathématique : la méthode de Lagrange.

Pour des situations qui donnent lieu à des *solutions intérieures*, la méthode de Lagrange et l'écriture directe de la condition d'équilibre du consommateur ou du producteur nous permet de nous passer des considérations mathématiques liées à la résolution du modèle. La méthode le Lagrange devient indispensable en présence de contraintes d'inégalité. Si nous devons par exemple compter avec des *solutions en coin (*où l'agent consomme par exemple un seul bien) nous devons introduire (en discuter) des contraintes d'inégalité. Nous avons contourné ces difficultés en passant par un raisonnement économique.

Il y a toutefois à considérer l'apport de la méthode de Lagrange dans l'interprétation des problèmes d'optimisation.

Pour illustrer nos propos, nous allons dans un premier temps introduire la méthode.

§1 La fonction de Lagrange

$$Max\ \ y = f(K, L)$$

$$sous\ D \geq rK + wL$$

Dans le cas d'un problème de maximisation nous devons écrire la contrainte pour faire apparaître une inégalité dans le « bon sens » : $D \geq rK + wL\ \ ou\ D - rK - Wl \geq 0$.

En anticipant sur le chapitre suivant, nous allons dire que ce problème est équivalent à celui de la minimisation du coût total sous la contrainte d'atteindre un niveau de production maximal.

Le problème s'écrit :

$$\min D = C_T = Wl + rK$$

$$sous\ y \leq f(K, L)$$

La contrainte dans un problème de minimisation correspond au « sens » : $y - f(K, L)) \leq 0$

Même si l'on considère des contraintes d'égalité, le sens de l'écriture de la contrainte est important. Nous donnerons l'explication plus bas dans le texte.

Quel que soit le problème, max ou min, la fonction de Lagrange se construit de la même manière. On introduit la variable « λ », appelée également le multiplicateur de Lagrange et l'on construit la fonction suivante :

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = f(K, L) + \lambda(D - rK - wL) \qquad (III.12)$$

On écrit la fonction objectif à maximiser (ou à minimiser) et on « ajoute » la contrainte multipliée par λ. Remarquez que pour ce problème de maximisation, nous avons écrit la contrainte dans le « bon sens ».

- Si la contrainte est saturée, c'est-à-dire si $D - rK - wL = 0$, alors $\lambda > 0$
- Dans le cas contraire : $D - rK - wL > 0$, alors $\lambda = 0$

Nous avons évacué ce problème en considérant que des contraintes d'égalité. Nous considérons implicitement que $K > 0 \; et \; L > 0$, nous avons donc des solutions intérieures. Les conditions du premier ordre pour un maximum imposées au Lagrangien sont de ce fait faciles à vérifier.

Nous sommes en présence de trois variables, nous devons vérifier 3 conditions :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \; \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial L} - \lambda w = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial L} = \lambda w$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \; \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial K} - \lambda r = 0 \; \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial K} = \lambda r$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \; \Rightarrow \; D - rK - wL = 0$$

La dernière condition donne toujours la contrainte. En établissant le rapport des deux premières conditions, nous éliminons λ, et surtout nous retrouvons la condition d'équilibre du producteur. La solution donnée par le Lagrangien dans le cas d'une contrainte d'égalité et en l'absence de solutions en coin est strictement identique à celle qui consiste à écrire la condition d'équilibre du producteur (éventuellement du consommateur), obtenir une équation et la combiner avec la contrainte pour résoudre. Nous pouvons donc nous passer du Lagrangien lorsque le problème est de nature simplifié.

Mais nous avons éliminé « λ » ! C'est une variable endogène du modèle d'optimisation et son interprétation mérite notre attention.

§2 Economie centralisée et économie de marché : l'interprétation du multiplicateur de Lagrange.

Nous avons abordé un exemple en cours sans le terminer.

Considérons une économie organisée en deux secteurs ou en deux activités de production. Elle dispose d'un seul facteur de production, le travail.

Nous en présence d'un problème d'allocation d'une ressource rare, le travail, entre deux activités alternatives. Les manuels de microéconomie nous exposent le problème en introduisant un planificateur bienveillant qui cherche à satisfaire le bien-être collectif.

La fonction-objectif consiste à maximiser la valeur de la production sous la contrainte de ses ressources en travail. Nous devons considérer à cet effet que chaque bien est produit avec une technique différente et que chaque bien est disponible à la vente moyennant un prix différent.

La fonction-objectif s'écrit :$Y = p_1 y_1 + p_2 y_2$ où $y_i, p_i \quad {}_{i=1,2}$ sont les quantités et les prix respectifs des biens 1,2.

Nous avons besoin d'introduire les informations sur les techniques de production de biens. Soient les fonctions de production suivantes :

$$y_1 = f_1(L_1) = 12\, L_1^{\frac{1}{3}} \qquad et \quad y_2 = f_2(L_2) = L_2^{\frac{1}{3}}$$

Pour des raisons de simplification des calculs, on choisit les prix des produits tels que $p_1 = 1$,

$p_2 = 3$, le problème du planificateur devient :

$$Max\, Y = 12L_1^{\frac{1}{3}} + 3L_2^{\frac{1}{3}}$$

$$sous\; L - L_1 - L_2 = 0$$

La quantité totale de travail est exogène. Elle est donnée par $L = 72$. Les variables de choix sont $L_1\; et\; L_2$.

Le lagrangien associé à ce problème s'écrit :

$$\mathcal{L} = 12\, L_1^{\frac{1}{3}} + 3L_2^{\frac{1}{3}} + \lambda[L - L_1 - L_2]$$

Les conditions du premier ordre pour un maximum s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} = 0 \Rightarrow 12\frac{1}{3}L_1^{-\frac{2}{3}} - \lambda = 0 \Rightarrow 4\, L_1^{-\frac{2}{3}} = \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_2} = 0 \Rightarrow 3\frac{1}{3}\, L_2^{\frac{-2}{3}} - \lambda = 0 \Rightarrow L_2^{-\frac{2}{3}} = \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow L - L_1 - L_2 = 0 \Rightarrow 72 = L_1 + L_2$$

Les deux premières conditions nous permettent d'éliminer λ. Nous obtenons :

$$4L_1^{-\frac{2}{3}} = L_2^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow 4\, L_2^{\frac{2}{3}} = L_1^{\frac{2}{3}}$$

Ou encore que :

$$L_1 = 4^{\frac{3}{2}}L_2 \Rightarrow L_1 = 8L_2$$

C'est la combinaison optimale des quantités de travail. En utilisant la contrainte, nous pouvons facilement déterminer les quantités de travail à l'équilibre :

$$L_1^* = 64 \quad et \quad L_2^* = 8$$

L'une ou l'autre des premières conditions du premier ordre nous permettent de calculer la valeur de λ. La deuxième nous paraît plus simple à calculer :

$$\lambda^* = \frac{1}{L_2^{\frac{2}{3}}} \mapsto \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} \mapsto \lambda^* = \frac{1}{4} \qquad (III.13)$$

Dans une économie décentralisée qui laisse le libre fonctionnement du marché déterminer l'équilibre entre l'offre et la demande de travail, le problème peut être posé de la manière suivante : chaque producteur (ou un producteur représentatif de son secteur) cherche à maximiser son profit et exprime une demande de travail.

$$Max\, \pi_1 = 12\, L_1^{\frac{1}{3}} - wL_1$$

$$Max\, \pi_2 = 3L_2^{\frac{1}{3}} - wL_2$$

$$\frac{d\pi_1}{dL_1} = 0 \mapsto 4\, L_1^{-\frac{2}{3}} = w \qquad et \qquad \frac{d\pi_2}{dL_2} = 0 \mapsto L_2^{-\frac{2}{3}} = w$$

La demande de travail de chaque secteur est exprimée comme une fonction du salaire.

$$L_1 = 8\, w^{-\frac{3}{2}} \quad et \quad L_2 = w^{-\frac{3}{2}}$$

Le rôle du marché consiste à réaliser l'équilibre entre l'offre et la demande de travail :

$$8w^{-\frac{3}{2}} + w^{-\frac{3}{2}} = 72 \mapsto 9w^{-\frac{3}{2}} = 72 \mapsto \frac{1}{w^{\frac{3}{2}}} = 8$$

On peut déduire facilement le salaire :

$$w^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \mapsto w = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \mapsto w^* = \frac{1}{4} \qquad (III.14)$$

Il suffit de comparer avec $(III.13)$ pour interpréter le résultat. Le planificateur simule le fonctionnement du marché et calcule le prix de la ressource rare (le travail) Le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de travail, possède l'interprétation du prix de cette ressource rare.

A priori cette ressource n'avait pas de prix aux yeux du planificateur. C'est donc un « valeur imputé » à cette ressource que le planificateur calcule. Elle lui permet de guider son action dans l'allocation de cette ressource entre les deux secteurs. C'est un « prix fictif » et il coïncide avec ce que le marché peut révéler par le jeu de l'offre et de la demande. Le terme « prix fictif » n'est pas très révélateur. En anglais ceci est qualifié de « **shadow price** », c'est une variable *qui suit comme son ombre l'allocation des quantités*. C'est en ce sens que ce prix est fictif.

Le message à retenir consiste à comprendre que le planificateur peut ne pas décider de l'allocation des quantités entre les secteurs, il lui suffit de donner l'information sur le prix de manière à guider les décisions privées pour allouer efficacement les ressources rares. Les deux solutions que nous avons sous les yeux sont équivalentes. La microéconomie ne prône pas la planification mais elle peut très bien l'englober dans son calcul.