Statique des fluides

I – Loi de la statique des fluides

I-1 / hypothèses

L'ensemble du milieu fluide est au repos ou animé d'un mouvement uniforme par rapport au référentiel. L'absence de différence de vitesse entre les différentes couches de fluide entraîne qu'il n'existe aucun effort de « frottement visqueux » (aucun cisaillement).

I-2 / tenseur des contraintes

En statique, à l'intérieur d'un fluide visqueux ou non, les seules contraintes sont les contraintes normales de pression :

$$\forall P \in \mathcal{D},\ \overline{\overline{\sigma}}(P) = -p\,.\,\overline{\overline{I}}$$

$$\forall P \in \mathcal{D}, \forall\ \vec{n},\ \overrightarrow{T(P, \vec{n})} = -p\,.\,\vec{n}$$

I-3 / domaine matériel $\mathcal{D}$

Soit $\mathcal{D}$ un domaine matériel à l'intérieur du fluide au repos. Il est lui-même au repos et soumis à deux types de forces :

- force de volume, à distance, en tout point de $\mathcal{D}$
  - ⇨ $\vec{f}$: densité massique d'efforts à distance
  - ⇨ $\overrightarrow{dF_V} = +\rho\,.\,dv\,.\,\vec{f}$
- force de pression, de contact, en tout point de $\partial\mathcal{D}$ (frontière de $\mathcal{D}$)
  - ⇨ $\overrightarrow{dF_p} = -p\,.\,ds\,.\,\vec{n}$

L'application du principe fondamental de la statique au domaine fluide $\mathcal{D}$ donne :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \rho\,.\,\vec{f}\,dv + \iint_{\partial\mathcal{D}} -p\,.\,\vec{n}\,ds = \vec{0}$$

$$\iiint_{\mathcal{D}} \left[\rho\,.\,\vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}}\,p\right] dv = \vec{0}$$

I-4 / loi de la statique

Pour un domaine matériel de contrôle choisi de manière quelconque à l'intérieur du fluide au repos, la relation précédente peut être écrite. Par conséquent, en tout point du domaine de fluide, on peut écrire la nullité de l'intégrande.

$$\boxed{\rho\,.\,\vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}}\,p = \vec{0}\ \text{, en tout point de } \mathcal{D}.}$$

Loi de la statique des fluides

II – Expressions particulières

II - 1 / cas où la force à distance dérive d'un potentiel

⇨ $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, W$ où W est un potentiel de force massique

L'équation de la statique peut alors s'écrire :

$$\overrightarrow{0} = \rho \,.\, \overrightarrow{\text{grad}}\, W + \overrightarrow{\text{grad}}\, p$$

II - 2 / cas où la force à distance dérive d'un potentiel et le fluide est incompressible

ρ et W sont des grandeurs réelles $\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\,(\rho \,.\, W) = \rho \,.\, \overrightarrow{\text{grad}}\, W + W \,.\, \overrightarrow{\text{grad}}\, \rho$

Si le fluide est incompressible, $\overrightarrow{\text{grad}}\, \rho = \overrightarrow{0}$

L'équation de la statique peut alors s'écrire : $\overrightarrow{grad}\,(p + \rho \,.\, W) = \overrightarrow{0}$

$$\boxed{p + \rho \,.\, W = C^{ste} \text{ dans tout le domaine de fluide}}$$

II - 3 / loi de l'hydrostatique

* hypothèses :
- le fluide est au repos
- le fluide est incompressible
- la seule force à distance est la pesanteur terrestre

Dans ce cas, pour le domaine de fluide, le potentiel de force peut s'écrire : $W = g \,.\, z + C^{ste}$ en appelant z l'altitude (coordonnée verticale ascendante).

Et l'équation de la statique s'écrit alors :

$$\boxed{p + \rho \,.\, g \,.\, z = C^{ste} \text{ dans tout le domaine de fluide}}$$

Loi de l'hydrostatique classique

* conséquences :

① Les surfaces isobares sont des surfaces horizontales.

② Vases communicants :
Si on considère des récipients de forme quelconque reliés entre eux (continuité du domaine) et ouverts sur la même ambiance (l'atmosphère, par exemple), les niveaux de fluide dans chacun d'eux se situent dans le même plan horizontal.

* remarque :

La loi de l'hydrostatique indique que toute particule (volume dv) considérée à l'intérieur du domaine de fluide est soumise à deux forces qui s'équilibrent parfaitement :

- son poids $-\rho\,.\,g\,.\,dv\,.\,\overrightarrow{k}$ ($\overrightarrow{k}$: vecteur unitaire de l'axe vertical)
- la résultante de pression de son environnement $-\overrightarrow{\text{grad}}\,p\ dv$

II - 4 / mises en garde

① Les lois précédentes s'appliquent à un **domaine continu** de fluide : deux « points particules » appartiennent au même domaine continu de fluide si ils sont constitués du même fluide et si il existe un « chemin » les reliant, chemin qui lui-même doit être à l'intérieur du domaine continu.

En présence de plusieurs domaines de fluide tous au repos et en contact, il faut donc écrire une loi pour chacun d'eux et traduire la continuité de la pression aux interfaces.

② Le même terme de « pression » (toujours de même dimension) peut cependant désigner des grandeurs différentes. Il est donc important d'opter pour des notations précises et de s'assurer de la signification du terme employé.

notation proposée	*décomposition*	*appellation recommandée*	*cadre d'utilisation du terme*
p		pression (statique ou thermodynamique)	Physique, Mécanique…
p_g ou $\hat{p}$	$p_g = p + \rho\,.\,g\,.\,z$	pression motrice	Hydrostatique, Hydraulique
p_e ou p_{eff}	$p_e = p - p_{ref}$ $p_{ref} = p_{atm}\ ,\ p_0 \ldots$	pression effective (⚠ langage courant : pression)	Mécanique…

III – Résultante de pression sur une surface

III - 1 / cas général

Le cas général ne pose pas de difficulté du strict point de vue mathématique.

$$\overrightarrow{R} = \iint_S -p\,\overrightarrow{n}\ ds$$

Pour calculer la résultante $\overrightarrow{R}$ de pression sur une surface S, il faut :
- connaître la surface d'intégration (éventuellement par une équation)
- la décomposer si celle-ci est en contact avec des domaines de fluides différents
- écrire la répartition de pression dans les divers domaines fluides
- calculer les diverses intégrales obtenues

Divers cas de charges particuliers conduisent à des résultats remarquables détaillés dans les sous paragraphes suivants.

III - 2 / centre de poussée

Dans le cas où la surface d'intégration est plane ou présente des symétries particulières, le système de forces réparties de pression est équivalent à une force unique ; ce qui n'est donc pas le cas en général. Le point d'application de la résultante est appelé ***centre de poussée***.

La recherche de la position de ce point conduit à des calculs analogues à ceux que l'on effectue lors de la recherche de la position du centre de gravité d'un domaine matériel. La méthode est justifiée par le *théorème du transport du moment* dans les cas d'une force répartie. On rappelle ci-dessous ce théorème dans le cas d'une distribution surfacique de force, puisque c'est le cas des efforts de pression.

Soit donc $\overrightarrow{f}$ une répartition (distribution continue) de force sur un domaine à deux dimensions S, dont la résultante est notée $\overrightarrow{R}$. Considérons de plus deux points O et O' de l'espace. Calculons le moment par rapport à O de la répartition de force, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}(\overrightarrow{f},S)} &= \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f}\, ds = \iint_S (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}) \wedge \overrightarrow{f}\, ds \\ &= \iint_S \overrightarrow{OO'} \wedge \overrightarrow{f}\, ds + \iint_S \overrightarrow{O'M} \wedge \overrightarrow{f}\, ds \\ &= \overrightarrow{OO'} \wedge \iint_S \overrightarrow{f}\, ds + \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}(\overrightarrow{f},S)} = \overrightarrow{OO'} \wedge \overrightarrow{R} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O'}(\overrightarrow{f},S)}\end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'il existe un point C tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/C}(\overrightarrow{f},S)} = \overrightarrow{0}$, l'application du théorème précédent nous permet de déterminer la position du point C par la formule : $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}(\overrightarrow{f},S)} = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{R}$

III - 3 / surface gauche soumise à une répartition uniforme

Sur chaque facette de la surface gauche ouverte $\mathbf{S_g}$ en contact avec une ambiance à la pression uniforme p_0, la force a pour expression :

$$\overrightarrow{dF} = -p_0 \,.\, ds \,.\, \overrightarrow{n}$$

Suivant une direction quelconque x_1 (vecteur unitaire $\overrightarrow{e_1}$), la force élémentaire a pour expression :

$$dF_{x1} = \overrightarrow{dF} \,.\, \overrightarrow{e_1} = -p_0\, ds \left(\overrightarrow{n} \,.\, \overrightarrow{e_1}\right) = -p_0\, ds \cos\left(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{e_1}\right) = -p_0\, ds_{x1}$$

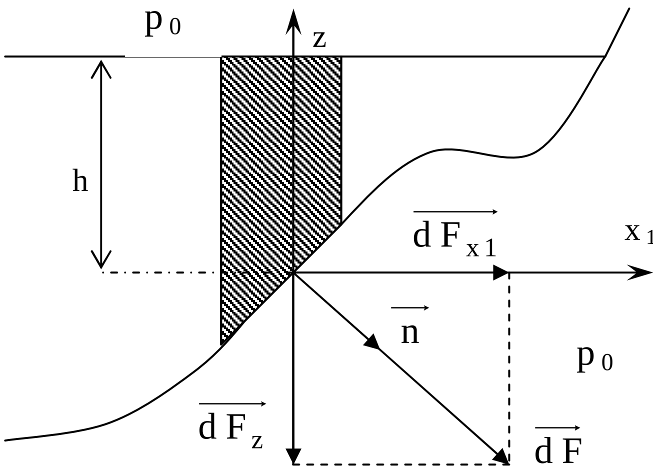
où ds_{x1} désigne la projection de ds dans un plan perpendiculaire à $\overrightarrow{e_1}$

…et la conclusion s'impose d'elle-même…

> Sur une surface gauche $\mathbf{S_g}$ de contour frontière $\mathcal{C}_\mathbf{a}$, la résultante de force d'une pression uniforme suivant la direction x 1 est égale à la force exercée par cette même pression uniforme sur la surface $\mathbf{S_{a/x1}}$, surface tracée dans le plan perpendiculaire à x 1 de contour $\mathcal{C}_\mathbf{a/x1}$, projection de $\mathcal{C}_\mathbf{a}$ dans le même plan.

III - 4 / surface gauche soumise à une répartition hydrostatique

On s'intéresse ici à l'effort résultant de pression sur une surface gauche ouverte $\mathbf{S_g}$ en contact avec une ambiance à la pression uniforme p_0 d'une part et avec un liquide au repos possédant une surface libre à la même pression p_0 d'autre part (on parle de **poussée**). Les deux ambiances sont séparées par le contour fermé $\mathcal{C}_{\mathbf{a}}$ tracé sur la surface et l'ensemble est placé dans le champ de pesanteur terrestre.

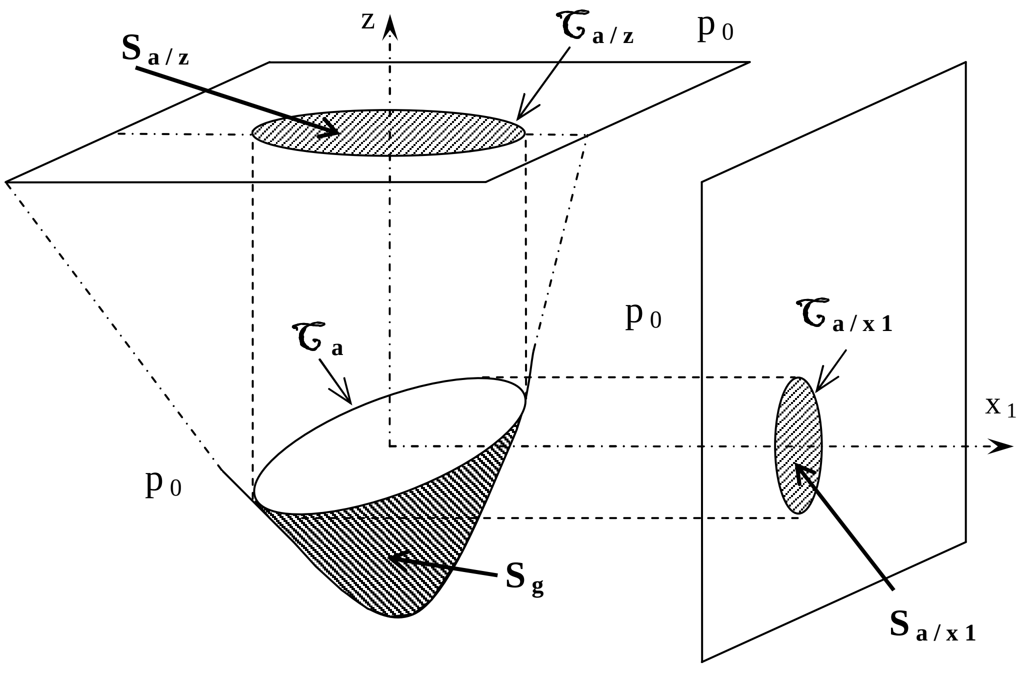


Le système de forces n'est pas équivalent à une force unique étant donné que la répartition de force n'est pas parallèle à une direction fixe.

On peut toutefois définir une force de poussée suivant une direction fixe donnée quelconque (horizontale x_1 ou verticale z) en sommant, sur l'ensemble de la surface, les projections des forces élémentaires suivant la direction donnée.

Quelques soient le cas étudié et la direction de poussée considérée, le calcul de la force résultante conduit à deux résultats généraux :

- Sur une surface gauche $\mathbf{S_g}$ de contour frontière $\mathcal{C}_{\mathbf{a}}$**,** la poussée suivant la direction horizontale x 1 est égale à la poussée sur la surface $\mathbf{S_{a/x1}}$, surface tracée dans le plan vertical perpendiculaire à x 1 de contour $\mathcal{C}_{\mathbf{a/x1}}$, projection de $\mathcal{C}_{\mathbf{a}}$ dans le même plan vertical.
- Sur une surface gauche $\mathbf{S_g}$ de contour frontière $\mathcal{C}_{\mathbf{a}}$, la poussée suivant la direction verticale est égale au poids de la colonne verticale de liquide limitée inférieurement par la surface $\mathbf{S_g}$ et supérieurement par la surface $\mathbf{S_{a/z}}$, surface tracée dans le plan horizontal de la surface libre de contour $\mathcal{C}_{\mathbf{a/z}}$, projection de $\mathcal{C}_{\mathbf{a}}$ dans le même plan horizontal.



De nombreux cas pratiques portent sur l'étude particulière de la poussée verticale : flottaison, effort sur un réservoir contenant un liquide…

III - 5 / Résultante sur une surface fermée

Le cas des surfaces fermées (flotteurs et autres) s'inscrit dans la suite logique du paragraphe III-4. De manière générale, il s'agit ici de l'étude de la résultante de force sur un …

…corps supposé le plus souvent indéformable (donc de frontière fermée, ou qui peut être fermée par un prolongement judicieux) en contact avec un milieu fluide incompressible le plus souvent au repos et placé dans le champ de pesanteur terrestre…

⇨ Poussée d'Archimède :

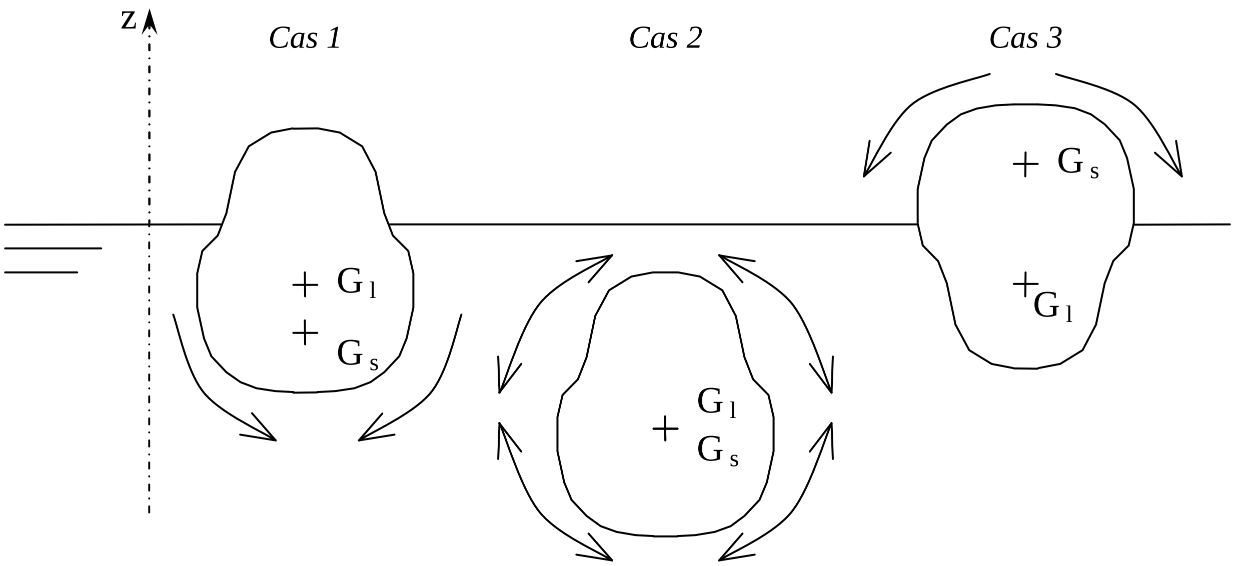
La résultante de pression hydrostatique sur un flotteur est dirigée suivant la verticale ascendante ; elle est exactement égale au poids du liquide qui occuperait l'espace occupé par le flotteur dans le milieu fluide. Le point d'application de cette résultante est le centre de gravité de ce domaine de liquide virtuel.

⇨ Régimes de flottaison :

1 / Le flotteur flotte librement et de manière stable si son centre de gravité G_s est situé au dessous de G_l , centre de gravité du domaine virtuel de liquide.

2 / Si les deux centres de gravité précédemment définis coïncident (cas d'un flotteur homogène, par exemple), l'équilibre du flotteur est indifférent.

3 / Si G_s est situé au dessus de G_l , la position de flottaison est instable.



⇨ Cas particuliers :

Certains corps présentent la particularité d'avoir une enveloppe externe de volume constant mais une masse (et donc un poids) ajustable de manière contrôlée ou non : une quantité de liquide pouvant pénétrer à l'intérieur de leur enveloppe. L'équilibre de ces corps est en général instable et il leur est impossible d'atteindre (en statique, du moins) une position d'équilibre. On peut citer le cas du sous-marin, du ludion…